Equilibri Correlati e Dispositivi di Correlazione: Espansione del Politopo di Nash e Complessità Computazionale

Fondamenti della Teoria dei Giochi e Concetti di Equilibrio

Introduzione alla Teoria dei Giochi Strategici

La teoria dei giochi rappresenta uno dei fondamenti dell'analisi matematica delle interazioni strategiche, fornendo un framework formale per studiare situazioni in cui le decisioni di molteplici agenti razionali si influenzano reciprocamente. Nata dai contributi seminali di John von Neumann e Oskar Morgenstern nel loro trattato monumentale del 1944, "Theory of Games and Economic Behavior", e successivamente rivoluzionata dal lavoro di John Forbes Nash negli anni Cinquanta, questa disciplina ha trovato applicazioni che spaziano dall'economia alla biologia evolutiva, dalla scienza politica all'informatica teorica, dalla progettazione di meccanismi alle reti di telecomunicazione.

Il concetto centrale attorno a cui ruota l'intera teoria dei giochi è quello di equilibrio strategico, una configurazione di strategie in cui nessun agente ha incentivo unilaterale a deviare dalla propria scelta dato il comportamento degli altri. Questa nozione cattura l'idea di una situazione stabile o auto-rafforzante, dove le aspettative degli agenti sulle azioni altrui sono confermate dalle azioni effettivamente intraprese, creando una sorta di profezia che si autoavvera. La ricerca e la caratterizzazione di tali configurazioni di equilibrio costituisce uno degli obiettivi primari dell'analisi strategica, e diverse nozioni di equilibrio sono state proposte nel corso dei decenni per catturare aspetti diversi della razionalità individuale e collettiva.

Un gioco strategico in forma normale, la rappresentazione più fondamentale nella teoria dei giochi, è specificato da una tupla $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$, dove $N = \{1, 2, ..., n\}$ è l'insieme finito dei giocatori, S_i è l'insieme delle strategie pure disponibili al giocatore i, e $u_i: S \to \mathbb{R}$ è la funzione di utilità (o payoff) del giocatore i, dove $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ denota l'insieme dei profili di strategie pure. Ogni elemento $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S$ rappresenta una configurazione completa del gioco, specificando la scelta strategica di ciascun giocatore, e $u_i(s)$ quantifica la preferenza o il beneficio che il giocatore i deriva da tale configurazione.

La razionalità degli agenti nella teoria dei giochi classica è tipicamente modellata attraverso l'assunzione che ciascun giocatore cerchi di massimizzare la propria utilità attesa, tenendo conto delle aspettative sul comportamento degli altri giocatori. Questa ipotesi di razionalità individuale, combinata con l'assunzione di conoscenza comune della struttura del gioco (cioè che tutti i giocatori conoscono le strategie disponibili e le funzioni di utilità di tutti, e

sanno che gli altri lo sanno, e sanno che gli altri sanno che lo sanno, e così via all'infinito), costituisce il fondamento su cui si costruiscono i concetti di equilibrio.

Tuttavia, è importante riconoscere che la teoria dei giochi classica rappresenta una idealizzazione significativa del comportamento strategico reale. Gli esseri umani e gli agenti artificiali nel mondo reale spesso deviano dalle prescrizioni della razionalità perfetta a causa di limitazioni cognitive, informazione incompleta, emozioni, considerazioni etiche, o semplicemente errori di calcolo. La teoria dei giochi comportamentale e sperimentale ha documentato numerose deviazioni sistematiche dalle predizioni della teoria classica, e queste osservazioni hanno stimolato lo sviluppo di modelli più realistici che incorporano razionalità limitata, apprendimento, e altri fenomeni psicologici e sociali.

L'Equilibrio di Nash e le Sue Proprietà Fondamentali

L'equilibrio di Nash, concetto introdotto da John Nash nella sua tesi di dottorato del 1950 e nei suoi articoli successivi, rappresenta la nozione di equilibrio più influente e ampiamente utilizzata nella teoria dei giochi. Un profilo di strategie (miste) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ costituisce un equilibrio di Nash se nessun giocatore può migliorare la propria utilità attesa deviando unilateralmente dalla propria strategia, mantenendo fisse le strategie degli altri giocatori.

Per definire questo concetto con precisione, dobbiamo prima introdurre la nozione di strategia mista. Una strategia mista per il giocatore i è una distribuzione di probabilità $\sigma_i: S_i \rightarrow [0, 1]$ sulle sue strategie pure, dove $\sigma_i(s_i)$ rappresenta la probabilità che il giocatore i scelga la strategia pura s_i, e ovviamente deve valere $\Sigma_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$. L'insieme delle strategie miste del giocatore i è denotato $\Delta(S_i)$, che è il simplesso di probabilità su S_i. L'utilità attesa del giocatore i dato un profilo di strategie miste $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ è:

$$U_i(\sigma) = \Sigma_{s \in S} [\Pi_{j=1}^n \sigma_j(s_j)] \cdot u_i(s)$$

Questa formula calcola la media pesata delle utilità pure, dove il peso di ciascun profilo puro s è la probabilità che si realizzi assumendo l'indipendenza stocastica delle scelte dei giocatori.

Un profilo di strategie miste $\sigma^* = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ è un equilibrio di Nash se per ogni giocatore i e per ogni strategia alternativa $\sigma'_i \in \Delta(S_i)$, abbiamo:

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma'_i, \sigma^*_{-i})$$

dove la notazione σ_{-i} denota il profilo delle strategie di tutti i giocatori eccetto i. In altre parole, la strategia σ_i è una risposta ottima (o best response) alle strategie degli altri giocatori σ^*_{-i}. Un equilibrio di Nash è quindi caratterizzato dalla proprietà che ogni giocatore sta giocando una risposta ottima alle strategie degli altri, creando una configurazione mutuamente consistente.

Il teorema fondamentale di Nash, dimostrato nel 1950, afferma che ogni gioco finito (cioè con un numero finito di giocatori e un insieme finito di strategie pure per ciascun giocatore) ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie miste. Questa è un'affermazione di esistenza notevole che garantisce la coerenza logica del concetto di equilibrio. La

dimostrazione originale di Nash utilizzava il teorema del punto fisso di Kakutani, un risultato topologico che generalizza il teorema del punto fisso di Brouwer alle corrispondenze multivoche.

L'idea della dimostrazione è elegante nella sua semplicità. Si definisce una corrispondenza di best response BR: Δ(S) ⇒ Δ(S) che associa a ogni profilo di strategie miste σ l'insieme dei profili σ' tali che ogni componente σ'*i è una risposta ottima a σ*{-i}. Questa corrispondenza soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani (è una corrispondenza a valori convessi compatti non vuoti da un insieme convesso compatto in se stesso, ed è semi-continua superiormente), e quindi ammette un punto fisso σ*. Tale punto fisso è precisamente un equilibrio di Nash, perché se σ* ∈ BR(σ*), allora ogni componente σ*_i è una risposta ottima a σ*_{-i}, che è esattamente la condizione di equilibrio.

Nonostante la sua eleganza matematica e la sua importanza teorica, l'equilibrio di Nash presenta diverse limitazioni come concetto predittivo e normativo. In primo luogo, i giochi possono avere molteplici equilibri di Nash, e la teoria non fornisce generalmente un principio di selezione che permetta di identificare quale equilibrio si realizzerà in pratica. Il problema della selezione dell'equilibrio ha generato un'ampia letteratura sui raffinamenti dell'equilibrio di Nash, che cercano di eliminare equilibri considerati "implausibili" sulla base di criteri aggiuntivi di razionalità o plausibilità dinamica.

In secondo luogo, alcuni equilibri di Nash possono essere inefficienti dal punto di vista sociale, nel senso che esistono configurazioni alternative che migliorano l'utilità di tutti i giocatori simultaneamente (o almeno di alcuni senza peggiorare quella degli altri). Il celebre dilemma del prigioniero fornisce l'esempio paradigmatico di questa possibilità: l'unico equilibrio di Nash è quello in cui entrambi i giocatori confessano, anche se la cooperazione reciproca (non confessare) porterebbe a un risultato superiore per entrambi. Questo fenomeno, dove la razionalità individuale porta a un risultato collettivamente subottimale, è stato ampiamente studiato sotto il nome di "tragedia dei beni comuni" e ha profonde implicazioni per il coordinamento sociale e la progettazione di istituzioni.

In terzo luogo, il calcolo di un equilibrio di Nash può essere computazionalmente intrattabile, come vedremo in dettaglio nelle sezioni successive. Anche per giochi relativamente piccoli, trovare un equilibrio di Nash può richiedere un tempo di calcolo esponenziale nel caso peggiore, sollevando questioni sulla ragionevolezza di assumere che agenti con razionalità limitata possano effettivamente convergere a tali configurazioni di equilibrio.

La Geometria del Politopo di Nash

Per comprendere appieno la struttura degli equilibri di Nash e prepararci a introdurre il concetto di equilibrio correlato, è essenziale sviluppare una prospettiva geometrica sullo spazio delle strategie e degli equilibri. Questa prospettiva rivela che l'insieme degli equilibri di Nash di un gioco ha una struttura combinatoria e geometrica ricca, che può essere studiata utilizzando strumenti dalla geometria computazionale e dalla teoria dei politopi.

Lo spazio delle strategie miste di un gioco è il prodotto cartesiano dei simplessi di probabilità dei singoli giocatori: Δ(S) = Δ(S_1) × Δ(S_2) × ... × Δ(S_n). Questo è un politopo convesso, cioè un insieme convesso compatto che può essere descritto come l'intersezione di un numero finito di semispazi. Per il giocatore i con m_i strategie pure, il simplesso Δ(S_i) è un

politopo di dimensione m_i - 1 immerso nello spazio $\mathbb{R}^{m_i}$, definito dalle disequazioni $\sigma_i(s_i) \geq 0$ per ogni $s_i \in S_i$ e dall'equazione $\Sigma_{s_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Il prodotto $\Delta(S)$ ha quindi dimensione $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + ... + (m_n - 1) = (\Sigma_i m_i) - n$. I vertici di questo politopo corrispondono ai profili di strategie pure: ogni vertice è della forma $(\delta_{s_1}, \delta_{s_2}, ..., \delta_{s_n})$, dove δ_{s_i} è la distribuzione degenerata che mette probabilità 1 sulla strategia pura s_i e 0 su tutte le altre.

L'insieme degli equilibri di Nash, che denoteremo NE(G), è un sottoinsieme di $\Delta(S)$ definito dalle disuguaglianze di equilibrio. Per ogni giocatore i e per ogni coppia di strategie pure s_i, $s'_i \in S_i$, se $\sigma_i(s_i) > 0$ *(cioè se s_i è giocata con probabilità positiva nell'equilibrio), allora s_i deve essere una risposta ottima, e quindi deve dare la stessa utilità attesa di ogni altra strategia nel supporto di* σ_i. Questo porta alle condizioni di indifferenza:

Se $\sigma_i(s_i) > 0$ *e* $\sigma_i(s'_i) > 0$, *allora* $\Sigma_{s_{-i}} [\Pi_{j \neq i} \sigma_j(s_j)] \cdot u_i(s_i, s_{-i}) = \Sigma_{s_{-i}} [\Pi_{j \neq i} \sigma_j(s_j)] \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$

Inoltre, per ogni strategia s'_i non nel supporto di σ^*_i, deve valere:

$\Sigma_{s_{-i}} [\Pi_{j \neq i} \sigma_j(s_j)] \cdot u_i(s_i, s_{-i}) \geq \Sigma_{s_{-i}} [\Pi_{j \neq i} \sigma^*_j(s_j)] \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$

dove s_i *denota una qualunque strategia nel supporto di* σ_i.

Queste condizioni definiscono NE(G) come un'unione finita di politopi. Infatti, per ogni possibile specificazione dei supporti delle strategie dei giocatori (cioè per ogni scelta di quali strategie pure sono giocate con probabilità positiva da ciascun giocatore), le condizioni di indifferenza e le disuguaglianze di ottimalità definiscono un politopo. L'insieme completo degli equilibri è l'unione di tutti questi politopi corrispondenti a supporti ammissibili.

Questa struttura geometrica ha conseguenze importanti. In primo luogo, implica che l'insieme degli equilibri di Nash è un insieme semi-algebrico, cioè può essere descritto usando un numero finito di disuguaglianze e uguaglianze polinomiali. In secondo luogo, gli equilibri di Nash formano un insieme chiuso (nella topologia di Hausdorff su $\Delta(S)$), e le componenti connesse di questo insieme sono convesse. Questi fatti geometrici sono stati dimostrati da Nash nel suo lavoro originale e sono stati oggetto di ulteriore studio nella letteratura successiva.

Un aspetto particolarmente interessante della geometria degli equilibri di Nash riguarda i giochi con due giocatori. Per questi giochi, esiste una relazione profonda tra gli equilibri di Nash e le soluzioni di sistemi di disuguaglianze lineari. In particolare, il problema di trovare un equilibrio di Nash per un gioco bimatrice (un gioco a due giocatori con strategie finite) può essere formulato come un problema di complementarità lineare (LCP), un tipo speciale di problema di ottimizzazione che generalizza la programmazione lineare.

Il problema di complementarità lineare consiste nel trovare vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che:

- $y = Mx + q$
- $x \geq 0, y \geq 0$
- $x^T y = 0$ (condizione di complementarità)

dove M è una matrice data e q è un vettore dato. La condizione di complementarità x^T y = 0 richiede che per ogni indice i, almeno uno tra x_i e y_i sia zero, il che crea una struttura combinatoria ricca nel problema.

La connessione tra equilibri di Nash e LCP emerge quando si formulano le condizioni di equilibrio per un gioco bimatrice come un sistema di disuguaglianze lineari con condizioni di complementarità. Le variabili del LCP corrispondono alle probabilità delle strategie pure e alle utilità attese, e le condizioni di complementarità catturano il fatto che una strategia è giocata con probabilità positiva se e solo se è una risposta ottima.

Questa formulazione come LCP ha permesso di applicare tecniche di ottimizzazione matematica al calcolo degli equilibri di Nash, e ha anche fornito insights sulla complessità computazionale del problema, come discuteremo in dettaglio nelle sezioni successive. In particolare, il problema LCP ha una struttura particolare per i giochi bimatrice che lo rende trattabile in pratica, anche se il caso peggiore può richiedere tempo esponenziale.

Le Limitazioni dell'Equilibrio di Nash come Soluzione Non Cooperativa

Nonostante la sua centralità nella teoria dei giochi, l'equilibrio di Nash presenta diverse limitazioni concettuali che hanno motivato la ricerca di concetti di soluzione alternativi. Una limitazione fondamentale riguarda l'assunzione di indipendenza stocastica delle scelte dei giocatori. Nell'equilibrio di Nash, si assume che ogni giocatore scelga la propria strategia indipendentemente dagli altri, nel senso che le scelte sono variabili aleatorie indipendenti quando le strategie sono miste.

Questa assunzione di indipendenza è problematica per diverse ragioni. In primo luogo, in molte situazioni reali, i giocatori possono avere accesso a segnali correlati che influenzano le loro scelte in modo coordinato. Per esempio, giocatori che osservano lo stesso segnale pubblico (come un annuncio, un evento naturale, o una raccomandazione da parte di un'autorità) possono condizionare le loro azioni su tale segnale, creando correlazione nelle loro scelte anche in assenza di comunicazione diretta.

In secondo luogo, l'indipendenza stocastica impedisce ai giocatori di sfruttare pienamente le possibilità di coordinamento implicito. In molti giochi, esistono configurazioni di gioco che danno utilità più alte a tutti i giocatori rispetto all'equilibrio di Nash, ma che richiedono un qualche meccanismo di coordinamento per essere implementate. L'equilibrio di Nash, richiedendo indipendenza, esclude per costruzione questi meccanismi di coordinamento basati su segnali correlati.

Un esempio illuminante è fornito dal gioco della battaglia dei sessi, un gioco classico che illustra il problema del coordinamento. Due giocatori devono scegliere indipendentemente tra due attività, diciamo andare all'opera (O) o a un evento sportivo (S). Entrambi preferiscono fare la stessa attività piuttosto che attività diverse (per stare insieme), ma hanno preferenze diverse su quale attività condividere: il giocatore 1 preferisce O mentre il giocatore 2 preferisce S. Le utilità potrebbero essere:

Giocatore 2: O S Giocatore 1: O (2,1) (0,0) S (0,0) (1,2)

Questo gioco ha tre equilibri di Nash: due equilibri in strategie pure (O,O) e (S,S), e un equilibrio in strategie miste dove ciascun giocatore sceglie O con probabilità 2/3 e S con probabilità 1/3. L'equilibrio misto dà utilità attese di (2/3, 2/3) a entrambi i giocatori, che è inferiore alle utilità in entrambi gli equilibri puri.

Tuttavia, se i giocatori potessero osservare un segnale pubblico correlatore, per esempio il lancio di una moneta equa, potrebbero coordinare le loro azioni condizionatamente al risultato: se esce testa vanno all'opera, se esce croce vanno all'evento sportivo. Questa strategia correlata darebbe utilità attese di (1/2)·2 + (1/2)·1 = 3/2 al giocatore 1 e (1/2)·1 + (1/2)·2 = 3/2 al giocatore 2, che è strettamente superiore alle utilità nell'equilibrio di Nash misto.

Questo esempio mostra che l'equilibrio di Nash può essere Pareto-dominato da distribuzioni di probabilità correlate sui profili di strategie pure. La possibilità di sfruttare la correlazione per migliorare gli esiti suggerisce che l'assunzione di indipendenza nell'equilibrio di Nash può essere troppo restrittiva, e che un concetto di equilibrio che ammette correlazione potrebbe essere più appropriato.

Un'altra limitazione dell'equilibrio di Nash riguarda la sua molteplicità. Come abbiamo visto nell'esempio della battaglia dei sessi, i giochi possono avere molteplici equilibri di Nash, e la teoria non fornisce generalmente un principio per selezionare tra di essi. Nei giochi con molteplici equilibri, la predizione dell'equilibrio di Nash diventa ambigua, e diventa importante considerare come i giocatori potrebbero coordinare le loro aspettative.

La presenza di molteplici equilibri solleva anche questioni di fairness o equità. Nel gioco della battaglia dei sessi, i due equilibri puri sono asimmetrici, favorendo un giocatore rispetto all'altro. Se non c'è modo di determinare quale equilibrio si realizzerà, potrebbero sorgere conflitti distributivi. L'equilibrio correlato, come vedremo, offre un modo di mediare questi conflitti permettendo randomizzazioni correlate che possono implementare compromessi equi tra i diversi equilibri.

Infine, l'equilibrio di Nash assume un livello molto alto di razionalità e di conoscenza comune. Ogni giocatore deve essere in grado di calcolare le risposte ottime date le credenze sulle strategie degli altri, e queste credenze devono essere corrette all'equilibrio. Inoltre, deve esserci conoscenza comune non solo della struttura del gioco, ma anche del fatto che tutti i giocatori sono razionali, che tutti sanno che tutti sono razionali, e così via. Queste assunzioni sono molto forti e possono non essere realistiche in molte situazioni pratiche.

Il concetto di equilibrio correlato, introdotto da Robert Aumann nel 1974, offre una risposta elegante a molte di queste limitazioni. Permettendo correlazione nelle scelte dei giocatori attraverso l'uso di segnali pubblici o di dispositivi di coordinamento, l'equilibrio correlato espande lo spazio delle possibili configurazioni di equilibrio e può portare a esiti più efficienti e più equi. Nelle sezioni successive, svilupperemo questo concetto in dettaglio e studieremo le sue proprietà matematiche e computazionali.

L'Equilibrio Correlato e i Dispositivi di Correlazione

La Definizione di Equilibrio Correlato

Il concetto di equilibrio correlato fu introdotto da Robert Aumann nel suo articolo seminale del 1974, "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies". L'idea fondamentale di Aumann era di permettere che i giocatori condizionassero le loro scelte su un segnale pubblico correlatore, invece di richiedere che le loro scelte fossero stocasticamente indipendenti come nell'equilibrio di Nash. Questa generalizzazione apparentemente semplice ha conseguenze profonde e rivela una struttura matematica ricca negli spazi delle soluzioni dei giochi.

Formalmente, un equilibrio correlato per un gioco $G = (N, (S_i)\{i \in N\}, (u_i)\{i \in N\})$ è una distribuzione di probabilità $\pi: S \to [0,1]$ sull'insieme dei profili di strategie pure $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$, dove π soddisfa le seguenti condizioni di incentivo: per ogni giocatore $i \in N$, per ogni strategia $s_i \in S_i$, e per ogni deviazione $s'_i \in S_i$, deve valere:

$$\Sigma_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot u_i(s_i, s_{-i}) \geq \Sigma_{s_{-i} \in S_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$$

Questa condizione afferma che se al giocatore i viene raccomandato di giocare la strategia s_i (cioè se riceve il segnale s_i), allora è nel suo interesse seguire questa raccomandazione piuttosto che deviare a qualsiasi altra strategia s'_i, dato che gli altri giocatori stanno presumibilmente seguendo le loro raccomandazioni.

Per comprendere meglio questa definizione, è utile pensare all'equilibrio correlato come implementato da un dispositivo di correlazione o mediatore, talvolta chiamato "dealer" nella letteratura. Questo dispositivo funziona come segue:

1. All'inizio del gioco, il dispositivo campiona un profilo di strategie $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ secondo la distribuzione π
2. Il dispositivo comunica privatamente a ciascun giocatore i la sua componente s_i
3. Ogni giocatore i decide se seguire la raccomandazione s_i o deviare a qualche altra strategia
4. Il gioco viene giocato e le utilità vengono realizzate in base alle scelte effettive

Un equilibrio correlato è una distribuzione π tale che, in questo protocollo, nessun giocatore ha incentivo a deviare dalla raccomandazione ricevuta, assumendo che gli altri giocatori seguano le loro raccomandazioni. La chiave è che ogni giocatore conosce solo la propria raccomandazione, non l'intero profilo campionato, e deve decidere la propria azione condizionatamente a questa informazione parziale.

La condizione di incentivo può essere riscritta in una forma equivalente più compatta introducendo le distribuzioni marginali condizionali. Data una distribuzione π su S e fissato un giocatore i e una strategia s_i, definiamo la distribuzione condizionale $\pi(\cdot|s_i)$ sulle strategie degli altri giocatori data la raccomandazione s_i al giocatore i:

$$\pi(s_{-i}|s_i) = \pi(s_i, s_{-i}) / \Sigma_{s'\{-i\}} \pi(s_i, s'_{-i})$$

quando il denominatore è positivo. Usando questa notazione, l'utilità attesa del giocatore i quando riceve la raccomandazione s_i e la segue è:

$U_i(s_i|s_i) = \Sigma_{s_{-i}} \pi(s_{-i}|s_i) \cdot u_i(s_i, s_{-i})$

mentre l'utilità attesa se devia a s'_i è:

$U_i(s'_i|s_i) = \Sigma_{s_{-i}} \pi(s_{-i}|s_i) \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$

La condizione di equilibrio correlato diventa quindi: per ogni i, s_i, s'_i, se $\pi(s_i) > 0$ (dove $\pi(s_i) = \Sigma_{s_{-i}} \pi(s_i, s_{-i})$ è la probabilità marginale che s_i venga raccomandato), allora $U_i(s_i|s_i) \geq U_i(s'_i|s_i)$.

Questa formulazione mette in evidenza la struttura bayesiana dell'equilibrio correlato: ogni giocatore aggiorna le proprie credenze sulle azioni degli altri condizionatamente alla propria raccomandazione, e sceglie una risposta ottima date queste credenze aggiornate. L'equilibrio richiede che le raccomandazioni stesse siano ottimali date le credenze che inducono.

La Relazione tra Equilibri Correlati e Equilibri di Nash

Un fatto fondamentale che stabilisce la generalità dell'equilibrio correlato è che ogni equilibrio di Nash può essere visto come un caso speciale di equilibrio correlato. Più precisamente, dato un equilibrio di Nash $\sigma^* = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ in strategie miste, possiamo costruire un equilibrio correlato π definendo:

$\pi(s) = \Pi_{i=1}^n \sigma^*_i(s_i)$

per ogni profilo puro $s = (s_1, ..., s_n)$. Questa distribuzione π è semplicemente il prodotto delle distribuzioni marginali σ^*_i, riflettendo l'indipendenza stocastica delle scelte nell'equilibrio di Nash.

Per verificare che π così definito è un equilibrio correlato, dobbiamo controllare le condizioni di incentivo. Supponiamo che il giocatore i riceva la raccomandazione s_i. La distribuzione condizionale sulle strategie degli altri è:

$\pi(s_{-i}|s_i) = \pi(s_i, s_{-i}) / \pi(s_i) = [\Pi_{j\neq i} \sigma j(s_j)] / 1 = \Pi_{j\neq i} \sigma_j(s_j)$

perché $\pi(s_i) = \Sigma_{s_{-i}} \Pi_j \sigma_j(s_j) = \sigma i(s_i) \cdot \Sigma_{s_{-i}} \Pi_{j\neq i} \sigma_j(s_j) = \sigma_i(s_i) \cdot 1 = \sigma^*_i(s_i)$, dove abbiamo usato che le marginali si fattorizzano per l'indipendenza.

L'utilità attesa di seguire la raccomandazione s_i è quindi:

$U_i(s_i|s_i) = \Sigma_{s_{-i}} [\Pi_{j\neq i} \sigma^* j(s_j)] \cdot u_i(s_i, s_{-i})$

mentre l'utilità di deviare a s'_i è:

$U_i(s'_i|s_i) = \Sigma_{s_{-i}} [\Pi_{j\neq i} \sigma^*_j(s_j)] \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$

Ma σ^* è un equilibrio di Nash, quindi σ_i è una risposta ottima a σ_{-i}, il che implica che per ogni s_i nel supporto di σ^*_i e ogni $s'_i \in S_i$, abbiamo $U_i(s_i|s_i) \geq U_i(s'_i|s_i)$. Quindi π soddisfa le condizioni di equilibrio correlato.

Questo argomento dimostra che l'insieme degli equilibri correlati CE(G) contiene l'insieme degli equilibri di Nash NE(G), o più precisamente, contiene l'immagine di NE(G) sotto la mappa che associa a ogni profilo di strategie miste la sua distribuzione prodotto sui profili puri. In generale, questa inclusione è stretta: esistono equilibri correlati che non sono rappresentabili come prodotti di strategie miste individuali.

L'esempio del gioco della battaglia dei sessi discusso precedentemente fornisce un'illustrazione concreta. Abbiamo visto che la distribuzione π che mette probabilità 1/2 su (O,O) e 1/2 su (S,S) è un equilibrio correlato che dà utilità (3/2, 3/2), superiori all'equilibrio di Nash misto. Questa distribuzione π non può essere rappresentata come prodotto di strategie miste individuali, perché impone una perfetta correlazione positiva tra le scelte dei giocatori, mentre i prodotti di strategie miste sono per definizione scorrelati.

Per vedere questo algebricamente, supponiamo per assurdo che esistano strategie miste σ_1, σ_2 tali che $\pi(s_1, s_2) = \sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2)$ per ogni (s_1, s_2). Allora:

- $\pi(O,O) = 1/2 = \sigma_1(O) \cdot \sigma_2(O)$
- $\pi(S,S) = 1/2 = \sigma_1(S) \cdot \sigma_2(S)$
- $\pi(O,S) = 0 = \sigma_1(O) \cdot \sigma_2(S)$
- $\pi(S,O) = 0 = \sigma_1(S) \cdot \sigma_2(O)$

Dalle ultime due equazioni, siccome $\sigma_1(O) + \sigma_1(S) = 1$ e $\sigma_2(O) + \sigma_2(S) = 1$, almeno una delle probabilità $\sigma_1(O)$, $\sigma_1(S)$, $\sigma_2(O)$, $\sigma_2(S)$ deve essere non nulla, il che contraddice $\pi(O,S) = \pi(S,O) = 0$. Quindi π non è fattorizzabile, e rappresenta un equilibrio correlato genuinamente non-Nash.

Il Politopo degli Equilibri Correlati

Una delle proprietà più belle dell'equilibrio correlato è che l'insieme CE(G) di tutti gli equilibri correlati di un gioco G forma un politopo convesso nello spazio delle distribuzioni di probabilità su S. Questa struttura geometrica contrasta con la struttura più complicata dell'insieme degli equilibri di Nash, che come abbiamo visto è un'unione di politopi ma non è generalmente convesso.

Per vedere che CE(G) è convesso, osserviamo che le condizioni di incentivo che definiscono un equilibrio correlato sono disuguaglianze lineari nei coefficienti della distribuzione π. Specificamente, per ogni giocatore i e per ogni coppia di strategie s_i, s'_i, la condizione:

$$\Sigma_{s_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot u_i(s_i, s_{-i}) \geq \Sigma_{s_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$$

è lineare in π. Possiamo riscriverla come:

$$\Sigma_{s_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot [u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i})] \geq 0$$

Inoltre, le condizioni che definiscono π come distribuzione di probabilità ($\pi(s) \geq 0$ per ogni s e $\Sigma_s \pi(s) = 1$) sono anch'esse lineari. Quindi CE(G) è definito come l'intersezione di semispazi lineari, il che lo rende un politopo.

Il numero totale di disuguagliazioni che definiscono CE(G) è dell'ordine di n · |S_i|^2 · |S_{-i}|, dove consideriamo tutte le possibili triple (i, s_i, s'*i) e tutte le possibili configurazioni s*{-i} degli altri giocatori. Per un gioco con n giocatori ciascuno con m strategie pure, questo dà circa n · m^2 · m^{n-1} = n · m^{n+1} disuguaglianze. Tuttavia, non tutte queste disuguaglianze sono necessarie per descrivere il politopo: molte sono ridondanti, e la descrizione minimale può avere molte meno disuguaglianze.

La dimensione del politopo CE(G), visto come sottoinsieme dello spazio affine delle distribuzioni di probabilità su S (che ha dimensione |S| - 1), può variare a seconda del gioco. In generale, CE(G) è full-dimensional in questo spazio affine se e solo se esistono equilibri correlati che danno probabilità strettamente positive a tutti i profili puri, il che è vero per molti giochi ma non per tutti.

I vertici del politopo CE(G) hanno un'interpretazione particolarmente interessante. Un vertice è un punto estremo che non può essere espresso come combinazione convessa non banale di altri punti nell'insieme. Per il politopo CE(G), i vertici corrispondono agli equilibri correlati che non possono essere ottenuti "mescolando" altri equilibri correlati. Caratterizzare questi equilibri correlati estremali è un problema interessante che ha ricevuto attenzione nella letteratura.

Un risultato importante, dovuto ad Aumann e altri ricercatori, stabilisce che l'insieme degli equilibri di Nash corrisponde (sotto la mappa di fattorizzazione discussa prima) a un sottopace del politopo CE(G). Più precisamente, se definiamo π_σ(s) = Π_i σ_i(s_i) per ogni profilo di strategie miste σ, allora l'immagine dell'insieme degli equilibri di Nash sotto questa mappa è contenuta nel politopo CE(G). Questa immagine è spesso chiamata il "politopo di Nash" e può essere vista come una sezione particolare del politopo degli equilibri correlati.

La convessità del politopo CE(G) ha conseguenze pratiche importanti. In particolare, significa che se π_1 e π_2 sono equilibri correlati, allora ogni combinazione convessa λπ_1 + (1-λ)π_2 con λ ∈ [0,1] è anch'essa un equilibrio correlato. Questo può essere implementato praticamente usando un dispositivo di correlazione a due livelli: prima si lancia una moneta con bias λ per decidere quale equilibrio usare, poi si campiona da quello equilibrio. Alternativamente, possiamo interpretare la combinazione convessa come una strategia mista sugli equilibri correlati, dove scegliamo quale protocollo di raccomandazione usare in modo randomizzato.

I Dispositivi di Correlazione e la loro Implementazione

Il concetto di dispositivo di correlazione è centrale per comprendere come gli equilibri correlati possono essere implementati in pratica. Un dispositivo di correlazione è un meccanismo che genera raccomandazioni per i giocatori secondo una distribuzione specificata, e comunica queste raccomandazioni privatamente a ciascun giocatore. Il dispositivo può essere pensato come un mediatore fidato, un'autorità, o semplicemente un fenomeno naturale osservabile che fornisce un segnale correlatore.

La forma più semplice di dispositivo di correlazione è un mediatore che conosce la distribuzione di equilibrio correlato π e che implementa il seguente protocollo:

1. Il mediatore campiona un profilo completo s = (s_1, ..., s_n) secondo la distribuzione π
2. Per ogni giocatore i, il mediatore invia privatamente la raccomandazione s_i
3. I giocatori ricevono le loro raccomandazioni e decidono autonomamente le loro azioni
4. Il gioco viene giocato con le azioni scelte

Questo protocollo assume che il mediatore sia fidato, nel senso che i giocatori credono che il mediatore stia effettivamente campionando secondo π e che stia comunicando le raccomandazioni correttamente. Inoltre, assume che la comunicazione tra il mediatore e ciascun giocatore sia privata, così che nessun giocatore conosca le raccomandazioni inviate agli altri.

In molte situazioni pratiche, tuttavia, non è disponibile un mediatore fidato esplicito. In questi casi, i giocatori possono cercare di implementare un equilibrio correlato usando segnali pubblici come dispositivi di correlazione impliciti. Un segnale pubblico è qualsiasi variabile aleatoria osservabile da tutti i giocatori, come:

- Eventi naturali (la posizione di una stella nel cielo, il tempo meteorologico, il risultato di un evento sportivo)
- Eventi sociali (annunci pubblici, decisioni di autorità, notizie)
- Eventi artificiali creati appositamente (lanci di monete pubbliche, generatori di numeri casuali pubblici)

L'idea è che i giocatori possano condizionare le loro strategie su questi segnali pubblici, concordando implicitamente o esplicitamente su una funzione che mappa i valori del segnale alle azioni da intraprendere. Se questa funzione è scelta appropriatamente, il risultato può essere un equilibrio correlato.

Per formalizzare questa idea, supponiamo che esista uno spazio di segnali Ω con una distribuzione di probabilità μ, e che ogni giocatore i adotti una strategia pura σ_i: Ω → S_i che specifica quale azione giocare per ogni possibile realizzazione del segnale. Il profilo di strategie (σ_1, ..., σ_n) induce una distribuzione di probabilità π sul prodotto S attraverso:

$$\pi(s) = \mu(\{\omega \in \Omega : \sigma(\omega) = s\})$$

dove σ = (σ_1, ..., σ_n). Se questa distribuzione indotta π è un equilibrio correlato, allora il profilo di strategie condizionate sul segnale pubblico implementa l'equilibrio correlato.

Un esempio classico di questo tipo di implementazione è il gioco della battaglia dei sessi con un segnale pubblico binario (per esempio, il lancio di una moneta equa). I giocatori potrebbero concordare sulla seguente convenzione: se la moneta mostra testa, entrambi vanno all'opera; se mostra croce, entrambi vanno all'evento sportivo. Questo implementa l'equilibrio correlato che abbiamo discusso prima, che mette probabilità 1/2 su ciascuno dei due profili (O,O) e (S,S).

La possibilità di implementare equilibri correlati usando segnali pubblici solleva questioni interessanti sulla comunicazione e il coordinamento. In particolare, i giocatori devono essere in grado di coordinare le loro interpretazioni del segnale pubblico, il che può richiedere

comunicazione pre-gioco o convenzioni sociali condivise. Nella teoria economica e nella teoria dei giochi evolutiva, si è studiato come tali convenzioni possano emergere attraverso processi di apprendimento o di selezione.

Gli Equilibri Correlati Oggettivi e Soggettivi

Nel suo articolo originale, Aumann distingueva tra due interpretazioni dell'equilibrio correlato: l'interpretazione oggettiva e quella soggettiva. Queste due interpretazioni differiscono nella natura epistemologica del dispositivo di correlazione e nelle assunzioni su cosa i giocatori sanno e credono.

Nell'interpretazione oggettiva, esiste effettivamente un dispositivo di correlazione fisico che genera le raccomandazioni secondo una distribuzione π che è conoscenza comune tra i giocatori. I giocatori sanno che il dispositivo sta campionando da π, sanno che gli altri lo sanno, e così via. Ogni giocatore riceve la propria raccomandazione privata e deve decidere se seguirla o meno, sapendo che gli altri giocatori stanno ricevendo le proprie raccomandazioni e presumibilmente le stanno seguendo.

In questa interpretazione, le condizioni di incentivo per l'equilibrio correlato emergono naturalmente da un'analisi di teoria dei giochi standard: ogni giocatore massimizza la propria utilità attesa condizionatamente alla propria informazione (la raccomandazione ricevuta), dato il comportamento degli altri giocatori (che si assume stiano seguendo le loro raccomandazioni). L'equilibrio è una configurazione mutuamente consistente dove tutti stanno seguendo le raccomandazioni proprio perché si aspettano che gli altri lo facciano.

Nell'interpretazione soggettiva, invece, non c'è necessariamente un dispositivo fisico esterno. Piuttosto, ogni giocatore ha credenze soggettive sull'evento aleatorio che determina il profilo di strategie, e queste credenze sono correlate attraverso la struttura di conoscenza comune. Un giocatore potrebbe credere che gli altri giocatori baseranno le loro scelte su certi segnali o considerazioni, e questi segnali potrebbero essere correlati con i propri.

Aumann mostrò che nell'interpretazione soggettiva, sotto appropriate assunzioni di conoscenza comune della razionalità e di coerenza bayesiana delle credenze, le distribuzioni di probabilità congiunte sulle azioni dei giocatori che emergono dalle credenze soggettive devono essere equilibri correlati. Questo risultato, noto come il "teorema di Aumann sulla razionalità correlata", fornisce una fondazione epistemologica per il concetto di equilibrio correlato.

La differenza tra le due interpretazioni ha implicazioni per la teoria e la pratica. L'interpretazione oggettiva è più vicina all'idea di meccanismi espliciti di coordinamento e può essere rilevante per situazioni dove effettivamente esistono autorità, mediatori, o segnali pubblici che coordinano il comportamento. L'interpretazione soggettiva è più astratta e filosofica, ma cattura l'idea che la correlazione può emergere semplicemente da credenze condivise e da ragionamento strategico comune, senza bisogno di dispositivi fisici esterni.

La Complessità Rappresentazionale degli Equilibri Correlati

Un aspetto pratico importante riguarda come rappresentare e comunicare gli equilibri correlati. Un equilibrio correlato è specificato da una distribuzione di probabilità π su S, lo

spazio dei profili di strategie pure. Per un gioco con n giocatori ciascuno con m strategie pure, questo spazio ha dimensione |S| = m^n, che cresce esponenzialmente con il numero di giocatori.

Rappresentare esplicitamente un equilibrio correlato richiede quindi specificare m^n - 1 parametri reali (le probabilità π(s) per ogni profilo s, meno uno perché le probabilità devono sommare a 1). Questa rappresentazione esplicita diventa rapidamente impraticabile per giochi con molti giocatori, anche se ogni giocatore ha solo poche strategie.

Per affrontare questo problema di esplosione combinatoria, sono state proposte rappresentazioni compatte degli equilibri correlati che sfruttano struttura nel gioco o nell'equilibrio. Alcune di queste rappresentazioni includono:

1. **Rappresentazioni grafiche**: Se il gioco ha una struttura grafica, dove le utilità di ciascun giocatore dipendono solo dalle azioni di un sottoinsieme di altri giocatori (i suoi vicini nel grafo), allora gli equilibri correlati possono essere rappresentati usando reti bayesiane o altri modelli grafici probabilistici. Queste rappresentazioni possono essere esponenzialmente più compatte quando il grafo è sparso.

2. **Rappresentazioni parametriche**: Per certe classi di giochi, gli equilibri correlati possono essere parametrizzati da un numero relativamente piccolo di parametri. Per esempio, nei giochi simmetrici, dove tutti i giocatori hanno le stesse strategie e le stesse funzioni di utilità (a meno di permutazioni), gli equilibri correlati simmetrici possono essere descritti usando solo le distribuzioni marginali sulle azioni, riducendo drasticamente il numero di parametri.

3. **Rappresentazioni implicite**: Invece di specificare esplicitamente la distribuzione π, si può rappresentare l'equilibrio correlato attraverso un algoritmo o un circuito che campiona da π. Questo è particolarmente naturale nell'interpretazione con dispositivi di correlazione: il dispositivo stesso può essere visto come un algoritmo randomizzato che produce le raccomandazioni.

La scelta della rappresentazione ha implicazioni per la complessità computazionale dei problemi relativi agli equilibri correlati, come vedremo nelle sezioni successive. In particolare, il problema di verificare se una distribuzione rappresentata in un certo formato è un equilibrio correlato, o il problema di trovare un equilibrio correlato che ottimizza un certo obiettivo, può avere complessità molto diverse a seconda della rappresentazione usata.

Proprietà Matematiche e Ottimizzazione degli Equilibri Correlati

L'Efficienza degli Equilibri Correlati e il Benessere Sociale

Una delle motivazioni principali per studiare gli equilibri correlati è la possibilità che essi possano portare a esiti più efficienti rispetto agli equilibri di Nash. L'efficienza in teoria dei giochi è tipicamente misurata attraverso il concetto di benessere sociale, che aggrega le

utilità individuali in qualche misura collettiva. La forma più comune di benessere sociale è la somma utilitarista, definita come:

$SW(\pi) = \Sigma_{i \in N} \Sigma_{s \in S} \pi(s) \cdot u_i(s) = \Sigma_{s \in S} \pi(s) \cdot [\Sigma_{i \in N} u_i(s)]$

Questa quantità rappresenta l'utilità totale attesa di tutti i giocatori quando il gioco è giocato secondo la distribuzione π. Altre misure di benessere sociale includono il benessere egualitario (il minimo delle utilità individuali) e il prodotto delle utilità (benessere di Nash), ciascuna con le proprie proprietà normative e computazionali.

Un risultato fondamentale, che può essere dimostrato usando tecniche di programmazione lineare, è che per ogni gioco finito esiste un equilibrio correlato che massimizza il benessere sociale utilitarista tra tutti gli equilibri correlati. Questo equilibrio ottimo può essere trovato risolvendo il seguente problema di ottimizzazione lineare:

massimizza $\Sigma_{s \in S} \pi(s) \cdot [\Sigma_{i \in N} u_i(s)]$ soggetto a $\Sigma_{s_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot [u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'i, s_{-i})] \geq 0$ per ogni i, s_i, s'*i* $\pi(s) \geq 0$ *per ogni* $s \in S$ $\Sigma_{s \in S} \pi(s) = 1$

Questo è un programma lineare con |S| variabili (le probabilità π(s)) e circa $n \cdot |S_i|^2$ vincoli di disuguaglianza (le condizioni di incentivo), più i vincoli di non negatività e di normalizzazione. La funzione obiettivo è lineare in π, e tutti i vincoli sono lineari, quindi il problema può essere risolto in tempo polinomiale usando algoritmi standard di programmazione lineare come il metodo del simplesso o metodi di punto interno.

Questa solubilità in tempo polinomiale contrasta drammaticamente con la difficoltà di calcolare equilibri di Nash, come vedremo nelle sezioni sulla complessità computazionale. Il fatto che possiamo efficacemente ottimizzare sugli equilibri correlati mentre calcolare anche un singolo equilibrio di Nash può essere computazionalmente intrattabile illustra un'asimmetria profonda nella struttura computazionale di questi due concetti di soluzione.

La possibilità di ottimizzare il benessere sociale sugli equilibri correlati ha importanti implicazioni per la progettazione di meccanismi e per la teoria dell'implementazione. Se un designer di meccanismi o un'autorità regolatoria può implementare un dispositivo di correlazione (per esempio, fornendo raccomandazioni pubbliche o creando opportunità di coordinamento), allora può potenzialmente guidare il sistema verso un equilibrio correlato socialmente ottimo. Questo è in contrasto con situazioni dove i giocatori devono coordinare su un equilibrio di Nash senza aiuto esterno, che può portare a esiti inefficienti a causa del problema della selezione dell'equilibrio o della struttura intrinseca del gioco.

Un concetto correlato è quello di prezzo dell'anarchia, introdotto da Koutsoupias e Papadimitriou, che misura la perdita di efficienza dovuta al comportamento strategico non cooperativo. Il prezzo dell'anarchia è definito come il rapporto tra il benessere sociale nell'ottimo sociale (la migliore distribuzione possibile senza vincoli di equilibrio) e il benessere sociale nel peggiore equilibrio. Per gli equilibri correlati, possiamo definire:

$PoA_CE = SW(OPT) / \min_{\pi \in CE(G)} SW(\pi)$

dove OPT denota la distribuzione che massimizza il benessere sociale senza vincoli di equilibrio. Similmente, per gli equilibri di Nash:

PoA_NE = SW(OPT) / min_{σ ∈ NE(G)} SW(σ)

Poiché CE(G) ⊇ NE(G) (nel senso che ogni equilibrio di Nash induce un equilibrio correlato), abbiamo che il peggiore equilibrio correlato non può essere peggiore del peggiore equilibrio di Nash, quindi PoA_CE ≤ PoA_NE. In molti giochi di interesse, questa disuguaglianza è stretta, indicando che permettere correlazione può migliorare significativamente l'efficienza del peggiore caso.

La Dualità e le Strategie di Deviazione

La struttura del problema di ottimizzazione lineare per trovare l'equilibrio correlato ottimo rivela una dualità profonda con un problema di scelta di strategie di deviazione. Questa dualità fornisce insights sulla struttura degli equilibri correlati e ha implicazioni per algoritmi e per l'interpretazione economica.

Il problema primale di massimizzare il benessere sociale sugli equilibri correlati può essere scritto in forma standard di programmazione lineare:

P: massimizza c^T x soggetto a Ax ≥ b x ≥ 0

dove x è il vettore delle probabilità π(s), c è il vettore dei benesseri sociali totali per profilo, A codifica le disuguaglianze di incentivo, e b è tipicamente il vettore nullo.

Il problema duale corrispondente, derivato usando la teoria della dualità della programmazione lineare, ha la forma:

D: minimizza b^T y soggetto a A^T y ≤ c y ≥ 0

Le variabili duali y possono essere interpretate come moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli di incentivo del problema primale. Ogni componente y_{i,s_i,s'_i} corrisponde al vincolo di incentivo per il giocatore i che riceve la raccomandazione s_i e considera la deviazione a s'_i.

L'interpretazione economica di queste variabili duali è illuminante. Il valore y_{i,s_i,s'_i} può essere visto come il "costo virtuale" di far rispettare il vincolo che il giocatore i non deve deviare da s_i a s'_i. Nell'equilibrio correlato ottimo, i vincoli di incentivo che sono attivi (cioè soddisfatti con uguaglianza) corrispondono a deviazioni che il giocatore sarebbe indifferente a fare, e le variabili duali corrispondenti possono essere positive. I vincoli che sono soddisfatti con disuguaglianza stretta (deviazioni che sono strettamente non profittevoli) hanno variabili duali nulle.

La teoria della dualità della programmazione lineare garantisce che se entrambi i problemi primale e duale sono ammissibili (hanno soluzioni), allora hanno lo stesso valore ottimo, e una soluzione ottima per l'uno può essere derivata da una soluzione ottima per l'altro usando le condizioni di complementarità:

π(s) · [vincolo di incentivo (i,s_i,s'*i) per il profilo s] = 0 y*{i,s_i,s'_i} · [π(s) - limite inferiore] = 0

Queste condizioni affermano che per ogni profilo s e ogni vincolo di incentivo, almeno uno tra la probabilità π(s) e lo slack del vincolo deve essere zero; e per ogni vincolo di incentivo, almeno uno tra il moltiplicatore duale y e lo slack del vincolo deve essere zero.

Questa dualità è stata sfruttata in algoritmi per calcolare equilibri correlati ottimi e per analizzare le proprietà strutturali di questi equilibri. In particolare, permette di dedurre informazioni sull'equilibrio ottimo studiando il problema duale, che può essere più semplice in certe situazioni.

Gli Equilibri Correlati Coarse e la Gerarchia di Raffinamenti

Oltre all'equilibrio correlato standard (talvolta chiamato equilibrio correlato fine o "fine correlated equilibrium"), sono stati proposti vari raffinamenti e indebolimenti del concetto che catturano diversi aspetti della correlazione e dell'informazione.

Un concetto particolarmente importante è quello di equilibrio correlato coarse (o "coarse correlated equilibrium"), introdotto da Moulin e Vial. In un equilibrio correlato coarse, ogni giocatore deve decidere la propria strategia prima di osservare la raccomandazione del dispositivo di correlazione, basandosi solo sulla distribuzione marginale delle raccomandazioni ricevute. Formalmente, una distribuzione π è un equilibrio correlato coarse se per ogni giocatore i e per ogni funzione di deviazione f_i: S_i → S_i, vale:

$$\Sigma_{s \in S} \pi(s) \cdot u_i(s) \geq \Sigma_{s \in S} \pi(s) \cdot u_i(f_i(s_i), s_{-i})$$

Questa condizione afferma che il giocatore i non può migliorare la propria utilità attesa impegnandosi ex-ante a deviare secondo qualsiasi funzione f_i delle raccomandazioni che riceverà. La differenza con l'equilibrio correlato fine è che qui il giocatore deve scegliere la funzione di deviazione f_i prima di osservare la realizzazione specifica della raccomandazione, mentre nell'equilibrio correlato fine può condizionare la decisione di deviazione sulla raccomandazione osservata.

È facile verificare che ogni equilibrio correlato fine è anche un equilibrio correlato coarse: se nessuna deviazione condizionale (basata sulla raccomandazione osservata) è profittevole, allora a fortiori nessuna deviazione ex-ante (indipendente dalla raccomandazione) può essere profittevole. Quindi abbiamo la catena di inclusioni:

$$NE(G) \subseteq CE(G) \subseteq CCE(G)$$

dove CCE(G) denota l'insieme degli equilibri correlati coarse. In generale, queste inclusioni sono strette: esistono equilibri correlati coarse che non sono equilibri correlati fini, e equilibri correlati fini che non sono equilibri di Nash.

La condizione per l'equilibrio correlato coarse è più debole di quella per l'equilibrio correlato fine, e questo si riflette nella struttura geometrica: l'insieme CCE(G) è un politopo più grande di CE(G), definito da meno vincoli. Infatti, mentre CE(G) ha circa $n \cdot |S_i|^2 \cdot |S_{-i}|$ vincoli di incentivo (uno per ogni tripla (i, s_i, s'*i) e ogni configurazione s*{-i}), CCE(G) ha solo circa $n \cdot |S_i|^2$ vincoli (uno per ogni tripla (i, s_i, s'*i), sommando su s*{-i}).

Questa riduzione nel numero di vincoli ha implicazioni computazionali. Mentre il problema di ottimizzare il benessere sociale su CE(G) è un programma lineare con esponenzialmente molte variabili e vincoli (nel numero di giocatori), il problema analogo per CCE(G) è ancora esponenziale nelle variabili ma può avere significativamente meno vincoli, rendendo potenzialmente più trattabile certi calcoli.

Gli equilibri correlati coarse hanno trovato applicazioni particolari nella teoria dei giochi algoritmici e nell'analisi di algoritmi di apprendimento. Molti algoritmi di apprendimento naturali, come il no-regret learning, convergono a equilibri correlati coarse piuttosto che a equilibri correlati fini o a equilibri di Nash. Questo fatto suggerisce che gli equilibri correlati coarse potrebbero essere più "naturali" come predizioni del comportamento in situazioni dove gli agenti apprendono nel tempo, piuttosto che avere conoscenza perfetta ex-ante.

I Supporti degli Equilibri Correlati e la Struttura Combinatoria

Un aspetto interessante della teoria degli equilibri correlati riguarda la struttura dei loro supporti, cioè l'insieme dei profili di strategie pure a cui l'equilibrio assegna probabilità positiva. Il supporto di un equilibrio correlato π è definito come:

$\text{supp}(\pi) = \{s \in S : \pi(s) > 0\}$

La dimensione e la struttura del supporto hanno implicazioni sia per la complessità rappresentazionale che per la complessità computazionale degli equilibri correlati.

Un primo risultato riguarda la cardinalità minima del supporto. In generale, un equilibrio correlato può avere supporto di dimensione arbitrariamente grande, potenzialmente includendo tutti i $|S| = m^n$ profili puri. Tuttavia, per certi obiettivi di ottimizzazione, può essere sufficiente considerare equilibri con supporti di dimensione polinomiale.

Per esempio, consideriamo il problema di trovare un equilibrio correlato che massimizza il benessere sociale. La soluzione ottima di questo problema di programmazione lineare, se è unica, corrisponde a un vertice del politopo CE(G). Per un politopo in dimensione d con f vincoli, i vertici hanno al massimo d componenti non nulle (dalla teoria della programmazione lineare: un punto è un vertice se e solo se è definito dall'intersezione di d iperpiani linearmente indipendenti). Nel caso del politopo CE(G), la dimensione è al massimo $|S| - 1$, quindi l'equilibrio correlato ottimo può essere rappresentato con supporto di dimensione al massimo $|S|$.

Questa osservazione è utile ma non risolve completamente il problema della rappresentazione compatta, perché $|S| = m^n$ è ancora esponenziale nel numero di giocatori. Tuttavia, in giochi con struttura particolare, è possibile derivare bounds più stretti sulla dimensione del supporto degli equilibri ottimi.

Un altro aspetto combinatorio interessante riguarda le regioni di indifferenza nel politopo CE(G). Un equilibrio correlato π è detto un equilibrio correlato totalmente misto se $\pi(s) > 0$ per ogni $s \in S$. Per tali equilibri, tutte le strategie pure devono essere risposte ottime con probabilità 1, il che impone forti vincoli sulla struttura del gioco. La caratterizzazione di quando esistono equilibri correlati totalmente misti è un problema interessante che dipende dalla struttura delle matrici di payoff.

La Relazione con i Giochi Bayesiani e i Giochi con Informazione Incompleta

Gli equilibri correlati hanno una connessione profonda con i giochi bayesiani, che sono giochi dove i giocatori hanno informazione privata sui loro tipi (parametri che influenzano le loro preferenze o le loro possibilità strategiche). Questa connessione è stata esplorata da Aumann, Forges, e altri ricercatori, e fornisce una prospettiva unificante su diversi concetti di equilibrio.

Un gioco bayesiano è specificato da:

- Un insieme di giocatori N
- Per ogni giocatore i, un insieme di tipi T_i e un insieme di azioni A_i
- Una distribuzione di probabilità comune p su $T = T_1 \times ... \times T_n$ (la distribuzione prior sui profili di tipi)
- Per ogni giocatore i, una funzione di utilità $u_i: A \times T \to \mathbb{R}$ che dipende dalle azioni di tutti e dai tipi di tutti

Ogni giocatore conosce il proprio tipo t_i ma non i tipi degli altri giocatori. Una strategia per il giocatore i è una funzione $\sigma_i: T_i \to \Delta(A_i)$ che specifica una distribuzione di probabilità sulle azioni per ogni possibile tipo. L'equilibrio bayesiano di Nash è un profilo di strategie tale che ogni giocatore massimizza la propria utilità attesa data la propria informazione (il proprio tipo) e date le strategie degli altri.

La connessione con gli equilibri correlati emerge osservando che un gioco con un dispositivo di correlazione può essere visto come un gioco bayesiano dove i "tipi" sono le raccomandazioni ricevute dal dispositivo, e la distribuzione prior è la distribuzione dell'equilibrio correlato. Viceversa, molti giochi bayesiani possono essere riformulati come giochi con informazione completa ma con correlazione.

Questa connessione è particolarmente evidente nella formulazione di Aumann degli equilibri correlati in termini di partizioni di informazione. In questa formulazione, si considera uno spazio di stati Ω con una distribuzione di probabilità μ, e ogni giocatore ha una partizione P_i dello spazio di stati che rappresenta la sua informazione: il giocatore può distinguere tra eventi in partizioni diverse ma non all'interno della stessa partizione. Un equilibrio correlato è allora una strategia misurabili rispetto alle partizioni che forma un equilibrio quando ogni giocatore condiziona sulle proprie informazioni.

Questa formulazione generale unifica gli equilibri correlati, gli equilibri bayesiani, e altri concetti di equilibrio con informazione asimmetrica o parziale. Mostra anche come la correlazione possa essere vista come informazione: un dispositivo di correlazione è equivalente a fornire ai giocatori segnali informativi correlati, e l'equilibrio emerge quando i giocatori rispondono ottimalmente a questi segnali.

Gli Algoritmi per il Calcolo di Equilibri Correlati

A differenza degli equilibri di Nash, gli equilibri correlati possono essere calcolati efficientemente usando algoritmi di programmazione lineare. Questo fatto ha importanti

implicazioni sia teoriche che pratiche, e ha motivato lo sviluppo di algoritmi specializzati che sfruttano la struttura particolare dei problemi di equilibrio correlato.

L'approccio più diretto è formulare il problema come un programma lineare e risolverlo usando algoritmi standard. Come abbiamo visto, trovare un equilibrio correlato che massimizza una funzione obiettivo lineare (come il benessere sociale) può essere formulato come:

massimizza $\Sigma_{s \in S} c_s \cdot \pi(s)$ soggetto a $\Sigma_{s_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot [u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s'_i, s_{-i})] \geq 0$ $\pi(s) \geq 0$, $\Sigma_s \pi(s) = 1$

Questo programma ha $|S| = m^n$ variabili e $O(n \cdot m^{n+1})$ vincoli. Per giochi piccoli (pochi giocatori e poche strategie), questo può essere risolto rapidamente usando solver LP commerciali come CPLEX o Gurobi, o implementazioni open-source come GLPK o Clp.

Per giochi più grandi, la dimensione esponenziale del programma diventa proibitiva, e sono necessari approcci più sofisticati. Diverse direzioni sono state esplorate:

1. **Sfruttare la struttura del gioco**: Se il gioco ha struttura particolare (per esempio, struttura grafica, simmetria, o sparsità), questa può essere sfruttata per ridurre la dimensione del programma lineare. Per esempio, nei giochi grafici dove le utilità dipendono solo da vicini locali, le variabili e i vincoli possono essere organizzati per riflettere questa struttura locale.

2. **Generazione di colonne**: Invece di rappresentare esplicitamente tutte le variabili $\pi(s)$, si può usare un algoritmo di generazione di colonne che aggiunge variabili iterativamente solo quando necessario. Questo è particolarmente utile quando si sa che l'equilibrio ottimo ha supporto sparso.

3. **Decomposizione**: Per giochi con struttura modulare o fattorizzabile, si possono usare tecniche di decomposizione come la decomposizione di Dantzig-Wolfe o la decomposizione di Benders per separare il problema in sottoproblemi più gestibili.

4. **Approssimazione**: Per giochi molto grandi, può essere necessario accontentarsi di soluzioni approssimate. Algoritmi di approssimazione che trovano equilibri correlati quasi-ottimi in tempo polinomiale sono stati sviluppati per varie classi di giochi.

Un approccio alternativo all'uso diretto della programmazione lineare è basato su algoritmi di learning o di dinamica adattiva. Come menzionato, molti algoritmi di no-regret learning convergono a equilibri correlati (o correlati coarse) nel limite. Questi algoritmi possono essere più pratici per giochi online o dinamici dove i giocatori apprendono nel tempo attraverso l'esperienza ripetuta.

L'algoritmo più semplice in questa categoria è il regret matching, proposto da Hart e Mas-Colell. In questo algoritmo, ogni giocatore mantiene una misura del "rimpianto" per non aver giocato ciascuna strategia nei round passati, e usa questi rimpianti per aggiornare le proprie probabilità di giocare le strategie nei round futuri. Hart e Mas-Colell hanno dimostrato

che se tutti i giocatori usano regret matching, la distribuzione empirica delle azioni converge a un equilibrio correlato.

Algoritmi più sofisticati, basati su tecniche di online learning come multiplicative weights update, Follow the Regularized Leader (FTRL), o mirror descent, hanno garanzie di convergenza più forti e tassi di convergenza più veloci. Questi algoritmi sono particolarmente attraenti per applicazioni dove il gioco è giocato ripetutamente e gli agenti possono adattare il loro comportamento basandosi sull'esperienza accumulata.

La Complessità Computazionale e la Classe PPAD

Introduzione alla Teoria della Complessità Computazionale per i Problemi di Equilibrio

La teoria della complessità computazionale studia la difficoltà intrinseca dei problemi computazionali, classificandoli in classi di complessità basate sulle risorse (tempo, spazio, randomness) necessarie per risolverli. Per i problemi di calcolo degli equilibri nei giochi, questa teoria fornisce strumenti fondamentali per comprendere quando e perché trovare equilibri è difficile, e quali tecniche algoritmiche possono essere efficaci.

La classe di complessità più famosa è P, che contiene i problemi decisionali (problemi con risposta sì/no) risolvibili in tempo polinomiale da una macchina di Turing deterministica. Intuitivamente, i problemi in P sono considerati "trattabili" o "efficientemente risolvibili". La classe NP contiene i problemi decisionali le cui soluzioni affermative possono essere verificate in tempo polinomiale dato un certificato appropriato. La famosa questione P versus NP chiede se ogni problema in NP sia anche in P, cioè se la verificabilità efficiente implichi la risolvibilità efficiente.

Tuttavia, molti problemi naturali nella teoria dei giochi non sono problemi decisionali ma problemi di ricerca: non chiediamo semplicemente se esiste un equilibrio con certe proprietà, ma vogliamo effettivamente trovare un equilibrio. Per questi problemi, le classi di complessità tradizionali come P e NP non sono direttamente applicabili, e sono necessarie generalizzazioni.

La classe FP (Function Polynomial time) contiene le funzioni calcolabili in tempo polinomiale. Analogamente, FNP (Function Nondeterministic Polynomial time) contiene i problemi di ricerca le cui soluzioni possono essere verificate in tempo polinomiale. Un problema in FNP è specificato da una relazione $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tale che:

1. Esiste un polinomio p tale che se $(x,y) \in R$ allora $|y| \leq p(|x|)$
2. R è decidibile in tempo polinomiale

Data un'istanza x, il problema è trovare un y tale che $(x,y) \in R$, se tale y esiste.

Un aspetto cruciale per i problemi di equilibrio è che, per il teorema di Nash, sappiamo che ogni gioco finito ha almeno un equilibrio di Nash. Questo significa che il problema di trovare un equilibrio di Nash è un problema di ricerca totale: esiste sempre una soluzione. Questa garanzia di esistenza suggerisce che il problema potrebbe avere una struttura particolare

che lo distingue dai problemi di ricerca generali in FNP, dove la soluzione potrebbe non esistere.

La Classe TFNP e le Sue Sottoclassi

La classe TFNP (Total Function Nondeterministic Polynomial time) contiene i problemi di ricerca in FNP per cui esiste sempre una soluzione. Formalmente, un problema è in TFNP se:

1. È in FNP (le soluzioni sono verificabili in tempo polinomiale)
2. Per ogni istanza x, esiste almeno un y tale che $(x,y) \in R$

La totalità di TFNP cattura l'idea che stiamo cercando qualcosa che sicuramente esiste. Tuttavia, TFNP è una classe molto ampia, e non tutti i problemi in TFNP hanno la stessa struttura o difficoltà. Per comprendere meglio la complessità dei problemi specifici, sono state identificate diverse sottoclassi di TFNP basate sui principi matematici che garantiscono l'esistenza delle soluzioni.

Le principali sottoclassi di TFNP includono:

1. **PLS (Polynomial Local Search)**: Contiene i problemi di ricerca locale dove esiste sempre un ottimo locale. Il principio sottostante è che ogni sequenza di miglioramenti deve eventualmente terminare in un ottimo locale.

2. **PPA (Polynomial Parity Argument)**: Basata sul principio che in un grafo finito non orientato, il numero di vertici di grado dispari è pari. Quindi, se conosciamo un vertice di grado dispari, deve esisterne un altro.

3. **PPAD (Polynomial Parity Argument, Directed)**: La versione diretta di PPA, basata sul principio che in un grafo diretto finito dove ogni vertice ha in-grado e out-grado al massimo 1, se conosciamo un vertice sorgente (out-grado 1, in-grado 0), deve esistere un altro vertice squilibrato (sorgente o pozzo).

4. **PPP (Polynomial Pigeonhole Principle)**: Basata sul principio dei cassetti: se più di n oggetti sono messi in n cassetti, almeno un cassetto contiene più di un oggetto.

Queste sottoclassi formano una gerarchia parziale sotto riduzioni polinomiali. È noto che PLS, PPA, e PPAD sono contenute in TFNP ∩ co-NP (perché l'esistenza di soluzioni può essere dimostrata esibendo certificati polinomiali), ma non è noto se queste inclusioni siano proprie. La questione delle relazioni precise tra queste classi rimane uno dei problemi aperti più importanti nella teoria della complessità.

La PPAD-Completezza e il Problema di Sperner

La classe PPAD è particolarmente rilevante per i problemi di equilibrio nei giochi perché cattura la struttura della dimostrazione di esistenza di Nash basata sui teoremi del punto fisso. Il problema completo originale per PPAD, proposto da Christos Papadimitriou nel 1994, è il problema END-OF-LINE.

Il problema END-OF-LINE è definito come segue. Consideriamo un grafo diretto dove ogni vertice ha in-grado e out-grado al massimo 1, e dove il grafo è rappresentato implicitamente da due circuiti booleani polinomialmente valutabili S (successore) e P (predecessore). Dato un vertice sorgente v_0 (con out-grado 1 e in-grado 0), il problema è trovare un altro vertice squilibrato (sorgente o pozzo).

L'esistenza di un tale vertice è garantita da un argomento combinatorio semplice: seguendo il cammino che parte da v_0, dobbiamo eventualmente raggiungere un vertice con out-grado 0 (un pozzo), perché il grafo è finito e non ci sono cicli (ogni vertice ha out-grado al massimo 1). Se questo pozzo ha in-grado 0, allora è isolato e quindi è un altro vertice squilibrato. Se ha in-grado 1, allora è il pozzo cercato.

Il problema END-OF-LINE cattura l'essenza computazionale della classe PPAD: sappiamo che una soluzione esiste per un principio di percorso diretto, ma trovarla può richiedere di attraversare un cammino potenzialmente lungo. Se il grafo ha dimensione esponenziale nella lunghezza della descrizione dei circuiti, allora seguire il cammino in modo ingenuo richiederebbe tempo esponenziale.

Un altro problema fondamentale PPAD-completo è il problema di Sperner. Il lemma di Sperner, dimostrato da Emanuel Sperner nel 1928, è un risultato topologico che afferma l'esistenza di simplessi "pancromatici" in triangolazioni colorate di simplessi. Più precisamente, data una triangolazione di un simplesso n-dimensionale e una colorazione dei vertici con n+1 colori che soddisfa certe condizioni al bordo, deve esistere almeno un simplesso piccolo (nella triangolazione) che ha tutti gli n+1 colori sui suoi vertici.

Il problema computazionale di Sperner è: data una triangolazione esponenzialmente grande rappresentata implicitamente da un circuito che calcola i colori, e data una garanzia che le condizioni al bordo del lemma di Sperner sono soddisfatte, trovare un simplesso pancromatico. Questo problema è PPAD-completo, come dimostrato da Papadimitriou.

La rilevanza del lemma di Sperner per i teoremi del punto fisso è ben nota. Il teorema del punto fisso di Brouwer può essere dimostrato usando il lemma di Sperner: data una funzione continua f: Δ^n → Δ^n dal simplesso standard n-dimensionale in se stesso, si costruisce una triangolazione fine e una colorazione appropriata basata su f, e si applica il lemma di Sperner per trovare un simplesso piccolo che approssima un punto fisso. Questa connessione topologica lega il lemma di Sperner ai teoremi di punto fisso e quindi agli equilibri di Nash.

La PPAD-Completezza del Calcolo degli Equilibri di Nash

Uno dei risultati più importanti nella teoria della complessità computazionale dei giochi è che il problema di calcolare un equilibrio di Nash è PPAD-completo, anche per giochi bimatrice (giochi a due giocatori con strategie finite). Questo risultato, dimostrato da Constantinos Daskalakis, Paul Goldberg e Christos Papadimitriou in una serie di articoli culminanti nel 2009, e indipendentemente da Xi Chen e Xiaotie Deng, ha risolto una questione aperta di lunga data e ha avuto un impatto profondo sulla teoria dei giochi algoritmici.

Per formulare il problema con precisione, definiamo il problema computazionale NASH come segue:

Problema NASH Input: Un gioco bimatrice (A, B) dove A, B sono matrici m × n con elementi razionali Output: Un equilibrio di Nash (σ_1, σ_2) rappresentato come coppia di distribuzioni di probabilità razionali

Il teorema di Nash garantisce che una soluzione esiste sempre, quindi NASH è in TFNP. Il risultato di PPAD-completezza afferma che:

1. NASH è in PPAD (esiste un algoritmo polinomiale che verifica che una soluzione proposta è un equilibrio)
2. NASH è PPAD-difficile (ogni problema in PPAD si riduce polinomialmente a NASH)

La dimostrazione di questo risultato è tecnicamente complessa e procede attraverso diverse riduzioni. La strategia generale è:

1. Mostrare che versioni appropriate del problema di Sperner o di END-OF-LINE si riducono a problemi di punto fisso su politopi
2. Mostrare che questi problemi di punto fisso si riducono a problemi di complementarità lineare
3. Mostrare che i problemi di complementarità lineare si riducono al calcolo di equilibri di Nash in giochi bimatrice

Il passo finale, dalla complementarità lineare agli equilibri di Nash, sfrutta la connessione tra LCP e equilibri di Nash discussa precedentemente. L'idea è che dato un problema LCP, si può costruire un gioco bimatrice le cui matrici di payoff codificano i dati del LCP, tale che gli equilibri di Nash del gioco corrispondono alle soluzioni del LCP.

Un aspetto tecnico importante è che questa riduzione deve preservare la lunghezza delle rappresentazioni: il gioco costruito deve avere dimensione polinomiale nella dimensione del problema LCP originale. Inoltre, la riduzione deve essere effettiva: deve esistere un algoritmo polinomiale che trasforma il problema LCP nel gioco corrispondente, e un algoritmo polinomiale che trasforma un equilibrio del gioco in una soluzione del LCP.

La PPAD-completezza di NASH ha conseguenze profonde per la teoria dei giochi. Significa che, sotto ragionevoli assunzioni di complessità (in particolare, che PPAD ≠ FP), non esiste un algoritmo efficiente che trovi equilibri di Nash in generale. Questo risultato è stato sorprendente per molti ricercatori, perché il teorema di Nash garantisce l'esistenza degli equilibri, e le dimostrazioni costruttive del teorema (basate su algoritmi come il metodo del simplesso di Lemke-Howson) suggerivano che gli equilibri potessero essere trovati efficientemente.

Tuttavia, è importante notare che la PPAD-completezza non implica che tutti i casi siano difficili. Significa solo che il caso peggiore è difficile: esistono istanze dove trovare un equilibrio richiede tempo superpolinomiale. In pratica, molti giochi di interesse potrebbero avere struttura particolare che permette di trovare equilibri efficientemente, anche se il caso generale è difficile.

L'Algoritmo di Lemke-Howson e la Sua Complessità

L'algoritmo di Lemke-Howson, proposto nel 1964, è un algoritmo classico per calcolare un equilibrio di Nash in giochi bimatrice. Questo algoritmo è basato su un'interpretazione geometrica dell'equilibrio di Nash come vertice di un politopo definito dalle condizioni di complementarità, e procede attraverso una sequenza di pivot simili a quelli usati nel metodo del simplesso per la programmazione lineare.

L'idea dell'algoritmo è la seguente. Dato un gioco bimatrice (A, B), le condizioni di equilibrio di Nash possono essere scritte come un sistema di disuguaglianze lineari con condizioni di complementarità. Queste condizioni definiscono un politopo in uno spazio di dimensione doppia rispetto al numero totale di strategie. L'algoritmo di Lemke-Howson parte da un vertice artificiale di questo politopo e esegue una sequenza di pivot per muoversi da vertice a vertice, mantenendo sempre la complementarità, fino a raggiungere un vertice che corrisponde a un equilibrio di Nash genuino.

Più precisamente, l'algoritmo funziona come segue:

1. Inizializza con una strategia completamente mista per entrambi i giocatori, che può non essere un equilibrio
2. Identifica una "etichetta duplicata" (una strategia che viola la complementarità)
3. Esegue un pivot che rimuove questa etichetta duplicata, introducendo potenzialmente un'altra etichetta duplicata
4. Ripete fino a raggiungere uno stato senza etichette duplicate, che corrisponde a un equilibrio di Nash

L'algoritmo è garantito terminare perché il grafo dei vertici del politopo ha una struttura particolare: è un grafo dove ogni vertice (eccetto i vertici speciali corrispondenti agli equilibri) ha grado esattamente 2. Questo significa che, partendo da un vertice speciale, possiamo seguire un cammino unico che deve eventualmente raggiungere un altro vertice speciale, che è un equilibrio di Nash.

Nonostante questa garanzia teorica di terminazione, l'algoritmo di Lemke-Howson può richiedere tempo esponenziale nel caso peggiore. Questo è stato dimostrato da Savani e von Stengel, che hanno costruito famiglie di giochi bimatrice su cui l'algoritmo esegue un numero esponenziale di pivot. Questi controesempi mostrano che, anche se l'algoritmo è simile nel spirito al metodo del simplesso (che è molto efficiente in pratica pur avendo complessità esponenziale nel caso peggiore), non può essere considerato un algoritmo efficiente in generale.

La complessità esponenziale di Lemke-Howson è coerente con la PPAD-completezza del problema NASH. Infatti, l'algoritmo di Lemke-Howson può essere visto come un'istanza del tipo di ricerca di cammino che definisce la classe PPAD: seguiamo un cammino in un grafo di vertici fino a trovare un equilibrio. Il fatto che questo cammino possa essere esponenzialmente lungo è esattamente ciò che rende il problema PPAD-difficile.

Gli Algoritmi di Approssimazione per Equilibri di Nash

Data la difficoltà di calcolare equilibri di Nash esatti, una direzione naturale è cercare algoritmi di approssimazione che trovino equilibri approssimati efficientemente. Un

ε-equilibrio di Nash è un profilo di strategie dove nessun giocatore può migliorare la propria utilità di più di ε deviando unilateralmente.

Formalmente, un profilo σ = (σ_1, ..., σ_n) è un ε-equilibrio di Nash se per ogni giocatore i e ogni strategia alternativa σ'_i:

U_i(σ_i, σ_{-i}) ≥ U_i(σ'*i, σ*{-i}) - ε

La questione è se esistono algoritmi efficienti che trovano ε-equilibri per valori ragionevolmente piccoli di ε.

Un risultato positivo in questa direzione è l'algoritmo di Lipton, Markakis e Mehta, che mostra che per giochi bimatrice con payoff in [0,1], esiste un ε-equilibrio con supporto di dimensione O(log n / ε^2) per ogni ε > 0, e un tale equilibrio può essere trovato in tempo polinomiale in n (ma esponenziale in 1/ε). Questo risultato è basato su tecniche probabilistiche: si mostra che un equilibrio con supporto piccolo campionato uniformemente ha alta probabilità di essere un buon approssimante.

Per valori di ε che sono costanti inverse del numero di strategie (per esempio, ε = 1/n), esistono algoritmi più efficienti. Daskalakis, Mehta e Papadimitriou hanno proposto un algoritmo che trova un (1/2 - δ)-equilibrio in tempo polinomiale per ogni costante δ > 0 in giochi bimatrice. Tuttavia, migliorare la costante 1/2 sembra difficile, e si congettura che trovare (1/4)-equilibri possa essere PPAD-difficile.

Un altro approccio all'approssimazione è basato su algoritmi di apprendimento. Come menzionato, algoritmi di no-regret learning come regret matching convergono a equilibri correlati (o correlati coarse) nel limite. In tempo finito, questi algoritmi producono distribuzioni empiriche che sono approssimazioni di equilibri correlati, e la qualità dell'approssimazione migliora con il numero di iterazioni. Tipicamente, dopo T iterazioni, il regret medio è O(1/√T), quindi per ottenere un ε-equilibrio correlato coarse, sono sufficienti O(1/ε^2) iterazioni.

Questi algoritmi di apprendimento hanno il vantaggio di essere distribuiti e adattivi: ogni giocatore esegue il proprio algoritmo localmente senza bisogno di coordinamento centrale, e l'algoritmo funziona anche in setting online dove le utilità possono cambiare nel tempo. Questo li rende particolarmente attraenti per applicazioni in sistemi multi-agente e in contesti di mercato dinamici.

La Complessità degli Equilibri Correlati Confrontata con gli Equilibri di Nash

In netto contrasto con la PPAD-completezza del calcolo degli equilibri di Nash, il calcolo di equilibri correlati risulta essere molto più trattabile. Come abbiamo discusso, trovare un equilibrio correlato che massimizza una funzione obiettivo lineare (come il benessere sociale) può essere formulato come un programma lineare e risolto in tempo polinomiale.

Più precisamente, il seguente problema è in P:

Problema OPTIMAL-CORRELATED-EQUILIBRIUM Input: Un gioco finito G = (N, (S_i), (u_i)) e coefficienti di una funzione obiettivo lineare c Output: Un equilibrio correlato π che massimizza Σ_s c_s · π(s) soggetto ai vincoli di incentivo

Questo contrasto drammatico tra la complessità degli equilibri di Nash e degli equilibri correlati ha diverse implicazioni:

1. **Teoriche**: Suggerisce che la struttura matematica degli equilibri correlati (un politopo convesso) è computazionalmente più benigna della struttura degli equilibri di Nash (un'unione non convessa di politopi). La convessità permette l'uso di potenti tecniche di ottimizzazione convessa che non sono disponibili per strutture non convesse.

2. **Algoritmiche**: Fornisce algoritmi pratici per calcolare e ottimizzare equilibri correlati in giochi di dimensione ragionevole. Mentre calcolare equilibri di Nash può essere proibitivo anche per giochi relativamente piccoli, possiamo ottimizzare su equilibri correlati usando solver LP standard.

3. **Concettuali**: Solleva questioni sulla "naturalezza" dei due concetti di equilibrio. Se assumiamo che gli agenti siano limitati computazionalmente, allora equilibri correlati potrebbero essere più realistici come predizioni del comportamento, perché possono essere calcolati efficientemente mentre gli equilibri di Nash potrebbero non essere accessibili.

4. **Progettuali**: Per il design di meccanismi e per l'implementazione di politiche, suggerisce che se possiamo introdurre dispositivi di correlazione o segnali pubblici, possiamo guidare il sistema verso esiti efficienti risolvendo problemi di ottimizzazione trattabili, mentre senza correlazione potremmo essere limitati a equilibri inefficienti e computazionalmente intrattabili.

Tuttavia, è importante notare che questa trattabilità degli equilibri correlati assume che il gioco possa essere rappresentato esplicitamente. Per giochi molto grandi con rappresentazioni compatte o implicite, anche formulare il programma lineare per gli equilibri correlati può essere difficile. In tali casi, la complessità dipende dalla rappresentazione specifica del gioco e da come le utilità e i vincoli possono essere acceduti.

Applicazioni, Estensioni e Prospettive Avanzate

Gli Equilibri Correlati nei Giochi di Routing e di Congestione

Una delle applicazioni più importanti e studiate degli equilibri correlati riguarda i giochi di routing e di congestione, che modellano situazioni dove molteplici agenti devono scegliere percorsi o risorse in una rete, e dove il costo per ciascun agente dipende dal congestionamento causato dalle scelte degli altri. Questi giochi sono centrali nella teoria delle reti di comunicazione, nella progettazione di sistemi di trasporto, e nell'allocazione di risorse computazionali.

Un gioco di congestione è specificato da:

- Un insieme di giocatori N = {1, 2, ..., n}
- Un insieme di risorse E (per esempio, archi in un grafo)
- Per ogni giocatore i, un insieme di strategie $S_i \subseteq 2^E$ (sottoinsiemi di risorse, per esempio percorsi in una rete)
- Per ogni risorsa $e \in E$, una funzione di costo $c_e: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che specifica il costo per usare la risorsa in funzione del numero di utenti

L'utilità (o più precisamente, il costo) del giocatore i quando il profilo di strategie è s = (s_1, ..., s_n) è:

$$u_i(s) = -\Sigma_{e \in s_i} c_e(|\{j : e \in s_j\}|)$$

dove il termine $|\{j : e \in s_j\}|$ conta quanti giocatori stanno usando la risorsa e. La funzione di costo c_e tipicamente cresce con la congestione: più utenti condividono una risorsa, più alto è il costo per ciascuno.

I giochi di congestione hanno proprietà speciali. Un risultato fondamentale di Rosenthal mostra che ogni gioco di congestione ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie pure, e che questi equilibri possono essere trovati attraverso dinamiche di miglior risposta (che eventualmente convergono perché il gioco ammette una funzione potenziale). Tuttavia, questi equilibri puri possono essere molto inefficienti rispetto all'ottimo sociale.

Il prezzo dell'anarchia per i giochi di congestione è stato studiato estensivamente. Per funzioni di costo lineari o affini, il prezzo dell'anarchia per equilibri di Nash è al massimo 4/3 per giochi non atomici (con infinitamente molti giocatori infinitesimali) e può essere più alto per giochi atomici. Per funzioni di costo polinomiali di grado d, il prezzo dell'anarchia cresce come $\Theta(d / \log d)$.

Gli equilibri correlati offrono la possibilità di migliorare significativamente l'efficienza in questi giochi. Un risultato notevole di Christodoulou e Koutsoupias mostra che il prezzo dell'anarchia per equilibri correlati in giochi di congestione con funzioni di costo affini è esattamente 1, cioè esiste sempre un equilibrio correlato che realizza l'ottimo sociale. Questo risultato è sorprendente: non solo gli equilibri correlati possono essere più efficienti degli equilibri di Nash, ma in questa classe di giochi possono raggiungere la perfetta efficienza.

La dimostrazione di questo risultato utilizza la programmazione lineare in modo essenziale. L'ottimo sociale in un gioco di congestione può essere formulato come un problema di flusso ottimo, che è un programma lineare. Separatamente, le condizioni per un equilibrio correlato formano un politopo definito da disuguaglianze lineari. Il risultato mostra che questi due politopi si intersecano: l'allocazione ottima di flusso può sempre essere implementata come equilibrio correlato.

Questa proprietà ha implicazioni pratiche importanti per la progettazione di sistemi di routing. Se un'autorità centrale può fornire raccomandazioni di routing ai singoli utenti (implementando un dispositivo di correlazione), può guidare il sistema verso l'ottimo sociale garantendo al contempo che ogni utente abbia incentivo a seguire la raccomandazione. Questo fornisce una soluzione elegante al problema di progettare meccanismi di routing che siano sia efficienti che incentivo-compatibili.

Gli Equilibri Correlati nei Giochi Ripetuti e nella Comunicazione

Nei giochi ripetuti, dove lo stesso gioco strategico è giocato ripetutamente nel tempo, gli equilibri correlati acquisiscono una dimensione temporale addizionale. I giocatori possono condizionare le loro azioni non solo su segnali correlatori esogeni, ma anche sulla storia del gioco passato, creando possibilità molto più ricche di coordinamento e di enforcement delle cooperazioni.

Il teorema di folk per i giochi ripetuti, in versione classica, caratterizza gli equilibri di Nash dei giochi infinitamente ripetuti in termini dei payoff individuellement razionali del gioco one-shot. Una versione più forte, dovuta a Aumann e Shapley, considera equilibri correlati dei giochi ripetuti e mostra che l'insieme dei payoff raggiungibili è anche più ampio.

Più precisamente, consideriamo un gioco stage G = (N, (S_i), (u_i)) che viene ripetuto infinitamente, con i giocatori che osservano tutte le azioni passate. Un equilibrio correlato del gioco ripetuto specifica, per ogni storia possibile del gioco, una distribuzione di probabilità correlata sulle azioni correnti. I giocatori condizionano le loro scelte sulla storia osservata e sul segnale correlatore ricevuto per il round corrente.

Il teorema di folk correlato afferma che, con un fattore di sconto sufficientemente vicino a 1, qualsiasi profilo di payoff che sia strettamente migliore per ogni giocatore rispetto al suo payoff di minmax (il peggior payoff che gli altri giocatori possono imporre su di lui) può essere realizzato come payoff di equilibrio correlato del gioco ripetuto. Questo risultato è più forte del teorema di folk standard per equilibri di Nash, perché l'insieme dei payoff correlati è più grande.

La dimostrazione di questi risultati utilizza strategie di punizione: se un giocatore devia dalla prescrizione dell'equilibrio, gli altri giocatori lo puniscono giocando la strategia di minmax contro di lui per un certo numero di periodi. La possibilità di usare correlazione nella fase di punizione rende queste minacce più credibili e permette di sostenere un insieme più ampio di comportamenti cooperativi.

Un'applicazione importante di questi risultati riguarda il ruolo della comunicazione nei giochi ripetuti. Se i giocatori possono comunicare prima di ogni round (cheap talk), questa comunicazione può servire come dispositivo di correlazione implicito. Anche se la comunicazione stessa non è vincolante (i giocatori possono mentire o ignorare i messaggi), in equilibrio la comunicazione può coordinare le azioni in modo che tutti i giocatori abbiano incentivo a comunicare onestamente e a seguire le raccomandazioni implicite.

Aumann e Hart hanno studiato estensivamente il ruolo della comunicazione nei giochi ripetuti, mostrando che la possibilità di comunicare può espandere l'insieme degli equilibri raggiungibili anche quando la comunicazione è cheap talk. L'idea chiave è che la comunicazione crea un segnale pubblico correlatore che tutti i giocatori osservano, e questo segnale può essere usato per coordinare le strategie e per rendere credibili certe minacce di punizione.

I Giochi Bayesiani e gli Equilibri Correlati con Informazione Privata

Nei giochi bayesiani, dove i giocatori hanno informazione privata sui loro tipi (parametri che influenzano le loro preferenze o possibilità), la nozione di equilibrio correlato si estende naturalmente per incorporare sia la correlazione tra le raccomandazioni che la correlazione con l'informazione privata.

Un equilibrio correlato bayesiano specifica una distribuzione di probabilità congiunta sui profili di tipi e sui profili di raccomandazioni, tale che ogni giocatore, condizionatamente al proprio tipo e alla propria raccomandazione, non ha incentivo a deviare. Formalmente, sia T = T_1 × ... × T_n lo spazio dei profili di tipi, con distribuzione prior p. Un equilibrio correlato bayesiano è una distribuzione π su T × S tale che:

1. La marginale di π su T coincide con p (le raccomandazioni non cambiano la distribuzione dei tipi)
2. Per ogni giocatore i, tipo t_i, raccomandazione s_i, e deviazione s'*i: E[u_i(s_i, s*{-i}, t_i, t_{-i}) | t_i, s_i] ≥ E[u_i(s'*i, s*{-i}, t_i, t_{-i}) | t_i, s_i]

dove le aspettative sono prese rispetto alla distribuzione condizionale di π data (t_i, s_i).

Questa definizione generalizza sia gli equilibri correlati standard (quando c'è un solo tipo per giocatore) che gli equilibri bayesiani di Nash standard (quando le raccomandazioni sono indipendenti dai tipi e tra giocatori). La struttura matematica è più ricca perché dobbiamo tenere traccia sia della correlazione tra tipi (che è data dal prior) sia della correlazione tra raccomandazioni (che è scelta dal dispositivo di correlazione).

Un risultato importante in questo contesto è il teorema di Forges, che caratterizza quando un equilibrio correlato bayesiano può essere implementato attraverso un meccanismo di comunicazione. Forges ha mostrato che certi equilibri correlati richiedono che il mediatore abbia accesso a informazione privata dei giocatori, e non possono essere implementati usando solo comunicazione cheap talk. Questo contrasta con il caso di informazione completa, dove abbiamo visto che gli equilibri correlati possono sempre essere implementati usando segnali pubblici o comunicazione.

La distinzione tra equilibri correlati implementabili con comunicazione pubblica e quelli che richiedono informazione privata ha portato alla definizione di diverse nozioni di equilibrio correlato per giochi bayesiani:

1. **Equilibri correlati canonici**: Richiedono solo un segnale pubblico osservato da tutti prima del gioco
2. **Equilibri correlati con mediatore**: Permettono al mediatore di inviare segnali privati correlati a ciascun giocatore
3. **Equilibri correlati con comunicazione**: Permettono ai giocatori di comunicare tra loro prima del gioco, ma senza mediatore esterno

Ciascuna di queste nozioni definisce un insieme diverso di equilibri possibili, con inclusioni strette in generale. La caratterizzazione precisa di questi insiemi e delle loro relazioni è un'area di ricerca attiva nella teoria dei giochi con informazione asimmetrica.

Gli Equilibri Correlati nei Meccanismi di Asta e di Allocazione

Le aste e i meccanismi di allocazione sono contesti dove gli equilibri correlati hanno trovato applicazioni particolarmente importanti. In un'asta, molteplici compratori competono per acquistare beni, e il meccanismo deve determinare chi vince e quanto paga basandosi sulle offerte. La teoria delle aste classica assume tipicamente che i compratori giochino un equilibrio di Nash del gioco indotto dal meccanismo.

Tuttavia, in molte situazioni reali, i compratori possono avere accesso a segnali correlatori che influenzano le loro valutazioni dei beni e le loro strategie di offerta. Per esempio, in aste per diritti minerari o per frequenze dello spettro elettromagnetico, tutti i partecipanti osservano gli stessi segnali economici pubblici (prezzi delle materie prime, condizioni di mercato) che influenzano le loro valutazioni. Questo crea correlazione naturale tra le strategie.

Il design ottimo di meccanismi di asta nel contesto di equilibri correlati è stato studiato da Crémer e McLean, che hanno dimostrato un risultato sorprendente: in presenza di correlazione nelle valutazioni private dei compratori, un venditore può estrarre l'intero surplus dell'asta (raggiungere il cosiddetto "full surplus extraction") usando meccanismi appropriati. Questo contrasta con il caso di valutazioni indipendenti, dove il teorema di Myerson mostra che il venditore deve lasciare una rendita informazionale ai compratori.

L'idea chiave è che la correlazione nelle valutazioni crea interdipendenze informative: osservando la propria valutazione, un compratore ottiene informazione sulle valutazioni degli altri. Un meccanismo ben progettato può sfruttare queste interdipendenze per incentivare la rivelazione onesta delle valutazioni e per estrarre tutto il surplus attraverso pagamenti che dipendono finemente dalle configurazioni delle offerte.

Tuttavia, questi meccanismi di full extraction sono spesso molto sensibili alla specificazione esatta della distribuzione di probabilità correlata sulle valutazioni. Piccole incertezze o errori nella specifica possono portare a perdite drammatiche di revenue. Questo ha motivato lo studio di meccanismi robusti che performano bene sotto varie specificazioni possibili della correlazione.

Un'altra applicazione importante riguarda le aste combinatoriali, dove i compratori hanno valutazioni per bundle di oggetti piuttosto che per singoli oggetti. In questi contesti, il problema di trovare l'allocazione ottima è computazionalmente difficile (NP-hard in generale), e i meccanismi devono bilanciare l'efficienza allocativa con la trattabilità computazionale e la incentivo-compatibilità.

Gli equilibri correlati offrono un framework per studiare meccanismi randomizzati in aste combinatoriali. Un meccanismo randomizzato specifica una distribuzione di probabilità sulle allocazioni e sui pagamenti, e questa distribuzione induce un equilibrio correlato nel gioco tra i compratori. La questione è se esistono meccanismi randomizzati efficientemente implementabili che raggiungono buone proprietà di efficienza e di revenue in equilibrio correlato.

Risultati recenti hanno mostrato che per certe classi di aste combinatoriali, meccanismi basati su approssimazioni randomizzate dell'allocazione ottima possono raggiungere garanzie di approssimazione migliori in equilibrio correlato rispetto a equilibri di Nash o a

meccanismi deterministici. Questo suggerisce che la randomizzazione correlata può essere un tool potente nel design di meccanismi per problemi computazionalmente difficili.

Gli Equilibri Correlati in Contesti Multi-Agente e di Apprendimento Automatico

Nell'apprendimento automatico multi-agente e nei sistemi distribuiti, gli equilibri correlati sono emersi come un concetto di soluzione particolarmente rilevante. Questi contesti sono caratterizzati da agenti che apprendono e si adattano nel tempo basandosi sull'esperienza, piuttosto che avere conoscenza perfetta ex-ante della struttura del gioco e delle strategie degli altri.

Un risultato fondamentale in questo contesto è che algoritmi di no-regret learning convergono a equilibri correlati coarse quando tutti gli agenti li usano. Il regret di un algoritmo di apprendimento è la differenza tra l'utilità che l'agente avrebbe potuto ottenere giocando sempre la miglior strategia fissa in retrospettiva, e l'utilità effettivamente ottenuta. Un algoritmo ha no-regret se questa differenza, normalizzata per il numero di round, tende a zero quando il numero di round tende all'infinito.

Formalmente, sia u_i^t l'utilità del giocatore i nel round t, e sia s*_i la strategia che avrebbe massimizzato l'utilità cumulativa ex-post:

$s^*_i = \text{argmax}\{s_i \in S_i\} \Sigma_{t=1}^T u_i^t(s_i, s_{-i}^t)$

Il regret al tempo T è:

$\text{Reg}_i(T) = \Sigma_{t=1}^T u_i^t(s^*_i, s_{-i}^t) - \Sigma_{t=1}^T u_i^t(s_i^t, s_{-i}^t)$

Un algoritmo ha no-regret se $\text{Reg}_i(T) = o(T)$, cioè il regret cresce sublinearmente con T.

Il teorema di convergenza, dimostrato da Hannan negli anni Cinquanta e generalizzato da molti autori successivi, afferma che se tutti i giocatori usano algoritmi no-regret, allora la distribuzione empirica delle azioni giocate converge a un equilibrio correlato coarse. Più precisamente, definendo la distribuzione empirica:

$\pi^T(s) = (1/T) \cdot |\{t \in [T] : s^t = s\}|$

si ha che π^T converge (in una opportuna nozione di convergenza) all'insieme degli equilibri correlati coarse quando $T \to \infty$.

Questo risultato è importante perché fornisce una giustificazione dinamica per gli equilibri correlati: anche senza un dispositivo di correlazione esplicito, agenti che apprendono indipendentemente usando algoritmi ragionevoli convergono naturalmente a comportamenti che formano equilibri correlati. Questo suggerisce che gli equilibri correlati possono essere più "naturali" come predizioni del comportamento rispetto agli equilibri di Nash in contesti di razionalità limitata o di apprendimento.

Algoritmi specifici con proprietà di no-regret includono:

- **Multiplicative Weights Update**: Mantiene pesi per ogni strategia e li aggiorna moltiplicativamente in base alle performance
- **Follow the Regularized Leader**: Sceglie la strategia che avrebbe performato meglio nel passato, con una regolarizzazione per favorire l'esplorazione
- **Online Gradient Descent**: Interpreta le strategie come punti nel simplesso e esegue discesa del gradiente proiettato

Questi algoritmi hanno garanzie di regret dell'ordine di $O(\sqrt{T})$ o migliori, e quindi convergono a equilibri correlati coarse con tasso di convergenza $1/\sqrt{T}$ o migliore.

Nell'apprendimento per rinforzo multi-agente, questi risultati hanno ispirato lo sviluppo di algoritmi che esplicitamente cercano di apprendere equilibri correlati. Per esempio, in setting dove gli agenti possono comunicare o osservare segnali comuni, possono usare questi segnali per coordinare le loro politiche di apprendimento, accelerando la convergenza e migliorando la qualità degli equilibri raggiunti.

Le Estensioni ad Ambiti più Generali

La teoria degli equilibri correlati si estende ben oltre i giochi finiti standard, e versioni del concetto sono state sviluppate per contesti molto più generali:

1. **Giochi con spazi di strategie continui**: Per giochi dove le strategie sono variabili continue (per esempio, quantità prodotte, prezzi, investimenti), gli equilibri correlati sono definiti come misure di probabilità su spazi di strategie continui. L'analisi utilizza tecniche dalla teoria della misura e dall'analisi funzionale.

2. **Giochi stocastici**: In giochi dove lo stato evolve stocasticamente nel tempo in risposta alle azioni dei giocatori, gli equilibri correlati possono condizionare su segnali che dipendono dalla storia dello stato. Questo porta a nozioni di equilibrio correlato Markoviano.

3. **Giochi differenziali**: Per giochi in tempo continuo dove le strategie sono funzioni di controllo e lo stato evolve secondo equazioni differenziali, gli equilibri correlati richiedono la specificazione di processi stocastici correlatori. L'analisi utilizza tecniche dal controllo stocastico e dal calcolo di Itô.

4. **Giochi con osservazioni parziali**: Quando i giocatori osservano il sistema in modo parziale o rumoroso, gli equilibri correlati devono tenere conto delle diverse informazioni disponibili a giocatori diversi. Questo connette la teoria degli equilibri correlati con la teoria dei sistemi decentralizzati e con la teoria dell'informazione.

5. **Giochi cooperativi**: Anche nella teoria dei giochi cooperativi, dove i giocatori possono formare coalizioni e negoziare accordi vincolanti, concetti correlati agli equilibri correlati sono stati sviluppati. Per esempio, il core e il nucleolus possono essere visti come concetti correlati che prescrivono allocazioni basate su principi di fairness e stabilità.

In ciascuno di questi contesti estesi, le proprietà fondamentali degli equilibri correlati (esistenza, convessità dell'insieme delle soluzioni, trattabilità computazionale relativa) spesso persistono, anche se le tecniche matematiche necessarie per l'analisi diventano più sofisticate. Questa universalità suggerisce che il principio di correlazione cattura qualcosa di fondamentale sulla struttura degli equilibri strategici che trascende i dettagli specifici del modello.

Sviluppi Recenti, Questioni Aperte e Conclusioni

I Recenti Sviluppi nella Teoria della Complessità degli Equilibri

Negli ultimi anni, la comprensione della complessità computazionale dei problemi di equilibrio ha fatto progressi significativi, rivelando una struttura ricca e sottile nelle relazioni tra diverse nozioni di equilibrio e diverse classi di complessità. Questi sviluppi hanno importanti implicazioni sia teoriche che pratiche per la teoria dei giochi algoritmici.

Un filone di ricerca importante riguarda la complessità di problemi di equilibrio in giochi con struttura particolare. Mentre il problema generale di calcolare equilibri di Nash è PPAD-completo anche per giochi bimatrice, per certe classi ristrette di giochi esistono algoritmi più efficienti. Per esempio:

- Giochi a somma zero: Gli equilibri di Nash possono essere trovati risolvendo un programma lineare (riducendo a un problema minimax), quindi in tempo polinomiale
- Giochi su alberi: In giochi rappresentati come alberi di gioco estensivi con informazione perfetta, l'equilibrio può essere trovato per backward induction in tempo lineare
- Giochi simmetrici con poche strategie: Quando il numero di strategie è costante, esistono algoritmi di enumerazione polinomiali (nel numero di giocatori)

Un risultato particolarmente interessante, dovuto a Chen, Deng e Teng, stabilisce che anche per giochi con payoff molto semplici (per esempio, con tutti i payoff in {0, 1}), il problema NASH rimane PPAD-completo. Questo mostra che la difficoltà non deriva dalla necessità di manipolare numeri complicati o fare aritmetica di precisione arbitraria, ma è intrinseca alla struttura combinatoria del problema.

Un'altra direzione di ricerca ha esplorato la complessità di trovare equilibri con proprietà speciali. Per esempio:

- Trovare l'equilibrio di Nash con il massimo benessere sociale è NP-difficile in generale (anche se verificare che un dato equilibrio è ottimale può essere facile)
- Trovare un equilibrio di Nash simmetrico in un gioco simmetrico è PPAD-completo
- Determinare se esiste un equilibrio di Nash con supporto di dimensione al massimo k è NP-completo per $k \geq 3$

Questi risultati mostrano che diverse varianti del problema di equilibrio hanno complessità diverse, e che la struttura computazionale è più ricca di quanto apparisse inizialmente.

Per gli equilibri correlati, la situazione è più chiara ma ci sono ancora questioni aperte interessanti. Sappiamo che ottimizzare funzioni obiettivo lineari sugli equilibri correlati è in P (via programmazione lineare), ma per obiettivi non lineari la situazione può essere più complessa. Per esempio:

- Massimizzare il prodotto delle utilità (benessere di Nash) sugli equilibri correlati è un problema di ottimizzazione convessa non lineare, risolvibile in tempo polinomiale usando metodi di punto interno
- Massimizzare funzioni obiettivo generali non convesse può essere NP-difficile

Un'area di ricerca attiva riguarda la complessità di comunicazione degli equilibri correlati. Quanta comunicazione è necessaria tra un mediatore e i giocatori per implementare un equilibrio correlato? Risultati recenti hanno mostrato che in certi giochi, la complessità di comunicazione può essere esponenzialmente minore della dimensione della rappresentazione esplicita dell'equilibrio, suggerendo che protocolli di comunicazione intelligenti possono ridurre drasticamente le risorse necessarie.

La PPAD-Hardness di Problemi Correlati e Varianti

La classe PPAD ha rivelato connessioni profonde tra problemi apparentemente diversi nella matematica e nell'informatica teorica. Oltre al calcolo degli equilibri di Nash, molti altri problemi sono stati dimostrati PPAD-completi, illuminando la struttura comune sottostante.

Un problema classico PPAD-completo è il problema di trovare un punto fisso di una funzione continua Lipschitz-continua da un simplesso compatto in se stesso, quando la funzione è data da un circuito di valutazione. Questo problema cattura l'essenza computazionale del teorema di Brouwer e mostra che, anche se il teorema garantisce l'esistenza del punto fisso, trovarlo può essere computazionalmente intrattabile.

Altri problemi PPAD-completi includono:

- **Arrow-Debreu market equilibrium**: Trovare un equilibrio competitivo in un'economia di scambio con preferenze specificate da funzioni di utilità
- **Exchange equilibrium con utilità lineari a pezzi**: Anche con funzioni di utilità molto semplici, il problema rimane PPAD-completo
- **Stable matchings con preferenze incomplete**: Trovare accoppiamenti stabili in mercati di matching con certe restrizioni
- **Tucker's problem**: Trovare soluzioni al problema di complementarità di Tucker, una generalizzazione del problema di Sperner

Questi risultati mostrano che la PPAD-completezza cattura una difficoltà computazionale che si manifesta in molti contesti dove esistono garanzie di esistenza basate su principi topologici o combinatorici, ma dove la costruzione effettiva delle soluzioni richiede ricerche potenzialmente esponenziali.

Un sviluppo recente particolarmente interessante riguarda la relazione tra PPAD e altre classi di complessità. Mentre si congettura che PPAD ≠ FP (cioè che i problemi PPAD-completi non siano risolvibili in tempo polinomiale), non si sa se PPAD sia contenuto in NP o in co-NP. Questo rende PPAD particolarmente intrigante dal punto di vista della

teoria della complessità: potrebbe rappresentare una classe di problemi genuinamente diversa dalle classi classiche basate su NP.

Alcuni ricercatori hanno esplorato la possibilità che PPAD possa essere "facile in media" anche se è difficile nel caso peggiore. L'idea è che, anche se esistono istanze difficili che richiedono tempo esponenziale, queste istanze potrebbero essere rare, e per istanze campionate da distribuzioni naturali il problema potrebbe essere trattabile. Risultati in questa direzione sono stati ottenuti per classi ristrette di giochi, ma la questione generale rimane aperta.

Gli Equilibri Correlati Quantistici e le Generalizzazioni

Un'area emergente di ricerca riguarda la generalizzazione degli equilibri correlati a contesti quantistici, dove i giocatori possono sfruttare fenomeni quantistici come entanglement e superposizione per ottenere correlazioni più forti di quelle possibili classicamente. Questa direzione connette la teoria dei giochi con la teoria dell'informazione quantistica e ha potenziali applicazioni nella crittografia quantistica e nel calcolo quantistico distribuito.

In un gioco quantistico, i giocatori possono condividere stati quantistici entangled e possono eseguire misurazioni quantistiche locali per generare le loro azioni. Il dispositivo di correlazione può preparare uno stato quantistico $|\psi\rangle$ nel sistema composto $H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_n$, dove H_i è lo spazio di Hilbert del giocatore i, e distribuire i sottosistemi ai giocatori. Ogni giocatore esegue poi una misurazione quantistica sul proprio sottosistema per produrre un'azione.

La distribuzione di probabilità risultante sulle azioni può esibire correlazioni non classiche che violano disuguaglianze di Bell. Queste correlazioni quantistiche sono più forti delle correlazioni classiche nel senso che possono implementare certi comportamenti correlati che non sono implementabili con variabili aleatorie classiche condivise.

Un risultato fondamentale in questo contesto è che l'insieme delle distribuzioni di probabilità implementabili con correlazioni quantistiche (chiamate Q-correlazioni) è strettamente più ampio dell'insieme delle distribuzioni implementabili classicamente. Questo si manifesta in giochi come il gioco CHSH, dove strategie quantistiche possono raggiungere probabilità di vittoria più alte di qualsiasi strategia classica.

Per gli equilibri correlati quantistici, la definizione naturale richiede che ogni giocatore, dato il proprio stato quantistico parziale e la misurazione specifica da eseguire, non abbia incentivo a eseguire una misurazione diversa. Formalmente, un stato quantistico $|\psi\rangle$ insieme a misurazioni $\{M_i\}$ per ogni giocatore i forma un equilibrio correlato quantistico se per ogni giocatore i e ogni misurazione alternativa M'_i:

$E[u_i(\text{risultato di } \{M_j\}_{j=1}^n)] \geq E[u_i(\text{risultato di } M'$*i per i e {M_j}*$\{j\neq i\})]$

dove le aspettative sono calcolate rispetto allo stato $|\psi\rangle$ e alle regole della meccanica quantistica.

La caratterizzazione completa dell'insieme degli equilibri correlati quantistici e la loro complessità computazionale rimangono questioni aperte. Risultati preliminari suggeriscono

che alcuni problemi di ottimizzazione sugli equilibri correlati quantistici possono essere più difficili dei corrispondenti problemi classici, potenzialmente richiedendo tecniche di programmazione semidefinita o di ottimizzazione su varietà quantistiche.

Le Questioni Aperte e le Direzioni Future

Nonostante i progressi significativi nella comprensione degli equilibri correlati e della loro complessità computazionale, rimangono molte questioni aperte fondamentali che continuano a stimolare la ricerca:

1. **La separazione PPAD vs FP**: La questione se PPAD = FP o PPAD ≠ FP rimane aperta. Una separazione dimostrerebbe rigorosamente che calcolare equilibri di Nash è intrinsecamente più difficile di calcolare equilibri correlati ottimi. Questa è considerata una delle questioni più importanti nella teoria della complessità algoritmica dei giochi.

2. **L'approssimazione sub-costante**: Esiste un algoritmo di tempo polinomiale che trova ε-equilibri di Nash con ε = o(1) per giochi bimatrice? Il miglior risultato attuale raggiunge ε = 1/2 - δ per ogni δ > 0. Dimostrare che trovare (1/4)-equilibri è PPAD-difficile, o trovare un algoritmo efficiente, sarebbe un breakthrough.

3. **La complessità di comunicazione degli equilibri correlati**: Qual è la complessità di comunicazione minima necessaria per implementare un equilibrio correlato ottimo in giochi grandi? Esistono protocolli di comunicazione sublineari per classi interessanti di giochi?

4. **Gli equilibri correlati in giochi infiniti**: Come si estende la teoria degli equilibri correlati a giochi con spazi di strategie non compatti o con payoff non limitati? Quali tecniche di analisi funzionale e teoria della misura sono necessarie?

5. **La robustezza degli equilibri correlati**: Come si comportano gli equilibri correlati quando c'è incertezza sulla struttura del gioco o rumore nell'implementazione del dispositivo di correlazione? Esistono nozioni di equilibri correlati approssimativamente robusti?

6. **Il learning di equilibri correlati con feedback limitato**: Quando i giocatori osservano solo feedback parziali sulle utilità (per esempio, solo la propria utilità realizzata, non quelle controfattuali), possono ancora convergere a equilibri correlati? Quali sono i tassi di convergenza ottimali?

7. **Gli equilibri correlati in giochi con costi computazionali**: Come si modifica la teoria quando i giocatori hanno risorse computazionali limitate e devono sostenere costi per calcolare le loro strategie? Questo connette la teoria degli equilibri con la complessità algoritmica e la teoria dei giochi algoritmici.

8. **Le applicazioni a problemi di ottimizzazione combinatoria**: Molti problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere formulati come giochi. Gli equilibri correlati offrono nuove tecniche di approssimazione per questi problemi? Quali sono

le garanzie di approssimazione raggiungibili?

Le Implicazioni Filosofiche e Metodologiche

Oltre alle questioni tecniche, la teoria degli equilibri correlati solleva interessanti questioni filosofiche e metodologiche riguardo alla natura della razionalità, del coordinamento, e delle aspettative in contesti strategici.

Una questione fondamentale riguarda lo status epistemologico dei dispositivi di correlazione. Nella formulazione oggettiva di Aumann, il dispositivo di correlazione è un'entità fisica reale che genera le raccomandazioni. Ma nella formulazione soggettiva, il dispositivo può essere visto come una costruzione mentale condivisa, un modo di modellare credenze correlate che emergono da conoscenza comune e ragionamento strategico condiviso. Questa dualità tra interpretazioni oggettive e soggettive riflette tensioni più ampie nella teoria economica tra approcci basati su preferenze rivelate e approcci basati su credenze e ragionamento.

Un'altra questione riguarda il ruolo dell'autorità o del coordinamento istituzionale. Gli equilibri correlati spesso assumono l'esistenza di un mediatore fidato o di un'autorità che può fornire raccomandazioni credibili. In contesti reali, come emergono tali autorità? Quando hanno legittimità? Come si garantisce che siano veramente fidate? Queste questioni connettono la teoria degli equilibri correlati con la teoria delle istituzioni, la teoria del contratto sociale, e la filosofia politica.

La distinzione tra equilibri di Nash ed equilibri correlati può anche essere vista come riflettente diverse concezioni della razionalità individuale. L'equilibrio di Nash incarna una visione individualistica dove ogni agente ottimizza indipendentemente, senza coordinamento esterno. L'equilibrio correlato permette un coordinamento mediato che può portare a esiti migliori per tutti, ma richiede una qualche forma di cooperazione o di sottomissione a raccomandazioni esterne. Questa tensione tra individualismo e coordinamento cooperativo è centrale in molte discussioni filosofiche ed economiche.

Dal punto di vista metodologico, la teoria degli equilibri correlati illustra come generalizzazioni matematiche di concetti standard possano rivelare strutture nascoste e suggerire nuove direzioni di ricerca. L'osservazione di Aumann che rilassare l'assunzione di indipendenza nell'equilibrio di Nash porta a un concetto più generale con proprietà matematiche migliori (convessità, trattabilità computazionale) è un esempio di come le generalizzazioni possano essere illuminanti anche quando non erano inizialmente motivate da applicazioni concrete.

Le Applicazioni Emergenti e le Prospettive Pratiche

Negli ultimi anni, gli equilibri correlati hanno trovato applicazioni in contesti sempre più diversi, molti dei quali erano difficili da anticipare quando Aumann introdusse il concetto negli anni Settanta.

Nel campo dell'intelligenza artificiale e del machine learning, gli equilibri correlati stanno diventando centrali per progettare sistemi multi-agente che devono coordinare le loro azioni in modo decentralizzato ma efficiente. Applicazioni includono:

- **Sistemi di controllo del traffico**: Veicoli autonomi che devono coordinare le loro traiettorie usando raccomandazioni da sistemi di gestione del traffico centralizzati
- **Reti di energia intelligenti**: Dispositivi che devono bilanciare il consumo e la produzione di energia basandosi su segnali di prezzo correlatori
- **Sistemi di raccomandazione multi-stakeholder**: Piattaforme che devono bilanciare gli interessi di utenti, creatori di contenuti, e inserzionisti attraverso raccomandazioni correlate

Nel campo della blockchain e delle criptovalute, gli equilibri correlati offrono potenziali soluzioni per problemi di coordinamento decentralizzato. Per esempio, i meccanismi di consenso possono essere visti come implementazioni di equilibri correlati dove un segnale pubblico (per esempio, un beacon randomizzato) coordina le azioni dei validatori.

Nel campo della biologia e dell'evoluzione, gli equilibri correlati forniscono modelli per capire come la correlazione nelle strategie può emergere attraverso processi evolutivi. Organismi che condividono segnali ambientali o che hanno meccanismi di comunicazione possono sviluppare strategie correlate che migliorano la fitness collettiva.

Nel campo della sicurezza informatica e della teoria dei giochi con l'avversario, gli equilibri correlati sono usati per progettare strategie di difesa che randomizzano le azioni di sicurezza in modo correlato per massimizzare la difficoltà per un attaccante di predire e sfruttare il sistema.

Queste applicazioni emergenti suggeriscono che la teoria degli equilibri correlati continuerà a essere rilevante e a evolversi in risposta a nuove sfide pratiche. La combinazione di eleganza matematica, trattabilità computazionale, e flessibilità concettuale rende gli equilibri correlati un tool attraente per affrontare problemi complessi di coordinamento strategico nel mondo moderno.

Conclusioni e Riflessioni Finali

La teoria degli equilibri correlati rappresenta una delle estensioni più importanti e fruttuose della teoria dei giochi classica di Nash. Permettendo correlazione nelle strategie dei giocatori attraverso dispositivi di coordinamento o segnali condivisi, questa teoria rivela una struttura matematica più ricca e computazionalmente più trattabile rispetto alla teoria standard degli equilibri di Nash.

La scoperta fondamentale che l'insieme degli equilibri correlati forma un politopo convesso, contrariamente alla struttura non convessa degli equilibri di Nash, ha conseguenze profonde sia teoriche che pratiche. Teoricamente, dimostra che rilassare l'assunzione di indipendenza stocastica porta a una geometria più semplice e più regolare. Praticamente, permette l'uso di tecniche di programmazione lineare per calcolare e ottimizzare equilibri, aprendo possibilità che erano precluse con gli equilibri di Nash.

La distinzione nella complessità computazionale tra equilibri di Nash (PPAD-completi) ed equilibri correlati (ottimizzabili in tempo polinomiale) illustra come la struttura matematica influenzi profondamente la trattabilità computazionale. Questa distinzione ha implicazioni per come pensiamo alla razionalità: se gli agenti sono computazionalmente limitati, potrebbero non essere in grado di calcolare equilibri di Nash anche quando questi esistono, ma

potrebbero essere in grado di convergere a equilibri correlati attraverso algoritmi di apprendimento naturali.

La classe di complessità PPAD ha rivelato connessioni profonde tra problemi apparentemente diversi, dal calcolo di equilibri di Nash alla ricerca di punti fissi, dai problemi di equilibrio di mercato alle soluzioni di problemi combinatorici. Questa unificazione suggerisce che c'è una struttura computazionale comune sottostante a molti problemi dove l'esistenza è garantita da principi topologici o combinatorici ma la costruzione effettiva può essere intrattabile.

Gli equilibri correlati hanno anche importanza normativa per il design di meccanismi e per la progettazione di istituzioni. Se un'autorità centrale o un coordinatore può implementare un dispositivo di correlazione credibile, allora può potenzialmente guidare il sistema verso esiti più efficienti e più equi rispetto a quelli che emergerebbero da interazioni non coordinate. Questo fornisce una giustificazione teorica per certi tipi di intervento istituzionale e di regolazione.

Le estensioni della teoria a contesti con informazione asimmetrica, giochi ripetuti, giochi su reti, e contesti quantistici dimostrano la flessibilità e la generalità del framework concettuale. Ognuna di queste estensioni rivela nuovi fenomeni e pone nuove sfide tecniche, ma il principio fondamentale—che la correlazione può migliorare il coordinamento e l'efficienza—persiste attraverso questi contesti diversi.

Le questioni aperte nella teoria degli equilibri correlati sono numerose e profonde. Dalla separazione tra PPAD e FP, alla caratterizzazione completa degli equilibri correlati in giochi infiniti, alla comprensione della robustezza e dell'apprendimento con feedback limitato, c'è molto spazio per ricerca futura. Queste questioni non sono solo di interesse teorico, ma hanno implicazioni dirette per applicazioni in economia, informatica, e ingegneria.

Le applicazioni pratiche degli equilibri correlati stanno crescendo rapidamente, guidate dallo sviluppo di sistemi multi-agente complessi, dalla digitalizzazione di mercati e istituzioni, e dalla necessità di coordinare azioni in reti su larga scala. La capacità di calcolare e ottimizzare equilibri correlati efficientemente li rende particolarmente attraenti per applicazioni dove le decisioni devono essere prese in tempo reale o dove il sistema deve adattarsi dinamicamente.

Dal punto di vista filosofico, la teoria degli equilibri correlati ci invita a riconsiderare le assunzioni fondamentali sulla razionalità individuale e sul coordinamento sociale. Suggerisce che l'indipendenza stocastica, spesso assunta implicitamente nei modelli economici standard, non è una conseguenza necessaria della razionalità ma una restrizione che può essere rilassata con beneficio. Ci ricorda anche l'importanza delle istituzioni di coordinamento e dei segnali condivisi nel facilitare l'azione collettiva efficiente.

In conclusione, gli equilibri correlati rappresentano molto più di una semplice generalizzazione tecnica dell'equilibrio di Nash. Costituiscono un framework concettuale ricco che unifica e illumina aspetti fondamentali del comportamento strategico, del coordinamento, e della razionalità collettiva. La loro struttura matematica elegante, la loro trattabilità computazionale relativa, e la loro rilevanza pratica crescente assicurano che

continueranno a essere un'area centrale di ricerca nella teoria dei giochi, nell'economia computazionale, e nei sistemi multi-agente per molti anni a venire.

L'espansione del politopo di Nash attraverso la correlazione non è solo un esercizio matematico, ma rivela possibilità strutturali profonde per il coordinamento e l'efficienza che erano nascoste nella formulazione classica della teoria dei giochi. La complessità computazionale diversa—con equilibri correlati in P ed equilibri di Nash PPAD-completi—non è un accidente tecnico ma riflette differenze fondamentali nella struttura geometrica e algoritmica di questi concetti. Comprendere queste distinzioni e le loro implicazioni continua a essere una delle frontiere più ricche e stimolanti della teoria economica e computazionale moderna.